

Michael V. Berry, physicien du H. H. Wills Physics Laboratory à Bristol, étudie les aspects topologiques de la propagation des ondes afin d'établir des liens entre la mécanique classique et la mécanique quantique.

■ Lorsqu'un rayon de soleil vient frapper la surface de la mer ou une goutte d'eau sur une vitre sale, on observe à l'œil nu des configurations lumineuses très esthétiques qui sont longtemps restées sans interprétation. Ces lignes ou surfaces où s'accumule la lumière ont été appelées caustiques. Ce sont en fait des singularités du phénomène de propagation des ondes lumineuses.

■ Une théorie des singularités avait donc toutes les chances de faire progresser la situation. C'est vers 1965 que R. Thom en proposa une : la théorie des catastrophes élémentaires. Dix ans plus tard, mettant à profit la ressemblance entre la forme de certaines caustiques et celle des sept catastrophes de Thom, les opticiens utilisèrent l'arsenal mathématique de cette théorie pour décrire et calculer les figures engendrées par la lumière dans l'eau.

■ L'accord entre le calcul et l'expérience a déjà permis de répondre à des questions face auxquelles l'optique géométrique ou ondulatoire étaient restées muettes ; par exemple que deviennent les images optiques d'un objet lorsque la longueur d'onde de la lumière tend vers zéro ?



Figure 1. L'apparence étincelante de la mer en plein soleil résulte d'une multitude de catastrophes-plis. Toute catastrophe est un « éclat », point où la surface fluctuante de la mer focalise la lumière dans l'œil de l'observateur : deux points de réflexion viennent y fusionner.

« Le soleil est bas sur l'horizon, et la mer est calme. Un vrai miroir, comme on dit. Mais en fait ce n'est pas un miroir. Les vagues — plutôt des vaguelettes, car elles vont et viennent en toutes directions, et on peut à peine percevoir leurs crêtes et leurs creux — sont constituées d'une infinité de petites surfaces se coupant selon les angles les plus divers et celles de ces surfaces qui réfléchissent directement la lumière du soleil dans l'œil, paraissent étinceler avec une lueur blanche à l'instant même où varie leur orientation relative à l'œil et au soleil, et elles disparaissent alors dans le fond bleu-noirâtre du reste de la mer. » (« G » par John Berger : Weidenfeld and Nicholson, 1972.)

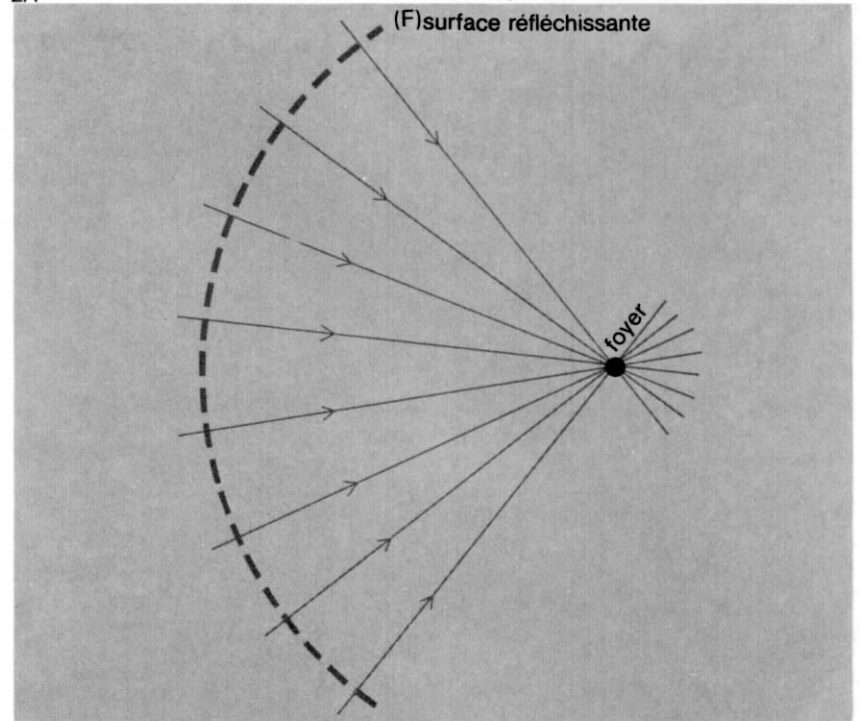


■ La science de la lumière a fait appel successivement à des modèles particuliers (théorie de l'émission de Newton) puis à des modèles ondulatoires (théorie de Fresnel). Aujourd'hui, l'électrodynamique quantique, expression mathématique récente de la mécanique quantique, constitue la théorie de la lumière la plus avancée. Les équations fondamentales de cette théorie ont des solutions exactes dans quelques cas particuliers que l'on cherche à reproduire artificiellement dans nos instruments d'optique tels que les télescopes et les interféromètres. On sait notamment que pour les fréquences très grandes, la théorie ondulatoire tend vers la théorie particulière, les trajectoires des « particules » s'identifiant aux rayons lumineux. En 1657, Fermat énonçait son principe selon lequel la nature agit toujours par les voies les plus courtes ou les plus longues. Autrement dit, la lumière a un comportement tel que le chemin qu'elle suit pour aller d'un point à un autre doit être parcouru en un temps minimum ou maximum. D'après ce principe, les rayons ne peuvent se propager dans le vide que de façon rectiligne. Ils constituent des familles de droites transversales aux *fronts d'onde* (*surfaces d'onde*). Dans le cas d'une source lumineuse ponctuelle, le front d'onde est sphérique. Ce n'est autre que l'ensemble de points que la lumière issue de la source atteint à un même instant.

Une analyse plus fine révèle qu'au cours de leur propagation, les véritables singularités des fronts d'onde sont les *surfaces caustiques* sur lesquelles la lumière s'accumule. Dans le langage de l'optique géométrique, cette surface caustique n'est autre que la surface-enveloppe de la famille des rayons lumineux (fig. 2).

Quelle expression mathématique peut-on donner à ces phénomènes et plus généralement dispose-t-on d'une théorie susceptible d'apporter des éléments de réponse aux opticiens qui s'interrogent sur l'existence ou non de configurations lumineuses (qu'on pourrait appeler typiques) qui se présenteraient de manière systématique quand il n'existe aucune symétrie, ni aucune situation spéciale? La théorie des catastrophes élémentaires (encadré 1) développée par R. Thom<sup>(1)</sup> et Arnol'd<sup>(2)</sup> satisfait cette demande. Elle a permis aux physiciens de conclure que ces configurations existent et sont précisément celles qui sont pourvues de la propriété de *stabilité structurelle*, c'est-à-dire dont la forme reste invariante sous l'effet de myriades de perturbations naturelles incontrôlables. Elles se comportent comme des cartes

2A



2B

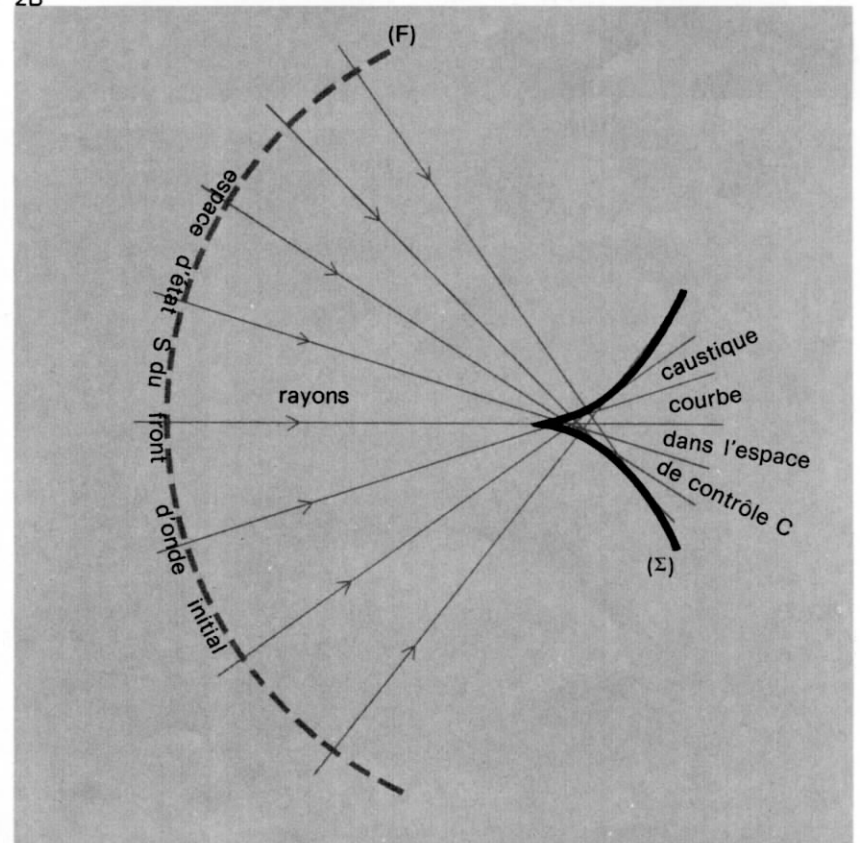
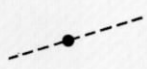






Figure 2. Les opticiens s'efforcent d'obtenir la convergence de tous les rayons en un seul point (A), le foyer. Mais cette situation est instable vis-à-vis des perturbations ; génériquement, les rayons ont une enveloppe, une courbe dans un plan, ou une surface dans l'espace. Sur la caustique, les rayons voisins sont tangents, et y concentrent l'énergie dont l'intensité (en optique géométrique) devient infinie.

1) R. Thom, *Topology*, 8, 13, 1969.

2) V.I. Arnol'd, *Dspekhi Mat Nauk (Russian Math. Surveys)*, 30 No. 5, 1975.

# 1. La hiérarchie des catastrophes :

codimension N				
nom	polynôme standard	$f(S; C)$	topologie de la caustique	
1 pli	$S^2/3 + CS$			
2 fronce	$S^4/4 + C_1 S^2/2 + C_2 S$			
3 queue d'aronde	$S^5/5 + C_1 S^3/3 + C_2 S^2/2 + C_3 S$			
3 ombilic elliptique	$S_1^3 - 3S_1 S_2^2 - C_3 (S_1^2 + S_2^2) - C_1 S_1 - C_2 S_2$			
3 ombilic hyperbolique	$S_1^3 + S_2^3 + C_3 S_1 S_2 - C_1 S_1 - C_2 S_2$			

Pour identifier une caustique, il faut connaître sa codimension (N), son nom et sa topologie. Le polynôme standard est l'objet mathématique sur lequel sont conduits tous les calculs. Par exemple, dans le cas du pli, les solutions de l'équation  $f' = 0$  sont  $S = \pm \sqrt{-C}$ , ce qui traduit bien que les points critiques fusionnent à l'origine  $S = 0$  lorsque  $C$  tend vers 0 comme pour l'éclat à la surface de la mer. Ici, nous avons limité l'illustration à  $N = 3$ , ce qui explique que nous n'ayons que cinq catastrophes au lieu de sept.

## Pourquoi la théorie des catastrophes ?

Pour décrire avec précision le monde réel, les mathématiciens ont introduit deux notions très importantes : la continuité et la discontinuité. Qu'il s'agisse de calculer sur des valeurs discrètes (deux chats plus deux chats) ou sur les mouvements continus et lents de la Terre, du Soleil et de la Lune, nous sommes sûrs d'avoir un résultat précis : quatre chats dans le premier cas ou la prédiction d'une éclipse dans l'autre. Que se passe-t-il lorsque le phénomène n'évolue plus lentement ? Nous pouvons toujours calculer, ce n'est guère plus compliqué. Prenons l'exemple d'une balle qui rebondit. Tant qu'elle monte ou qu'elle descend, le phénomène est continu mais, au sommet de sa trajectoire lorsque brusquement la balle retombe, il y a singularité. En termes de calcul, on traduit ceci en écrivant que la dérivée de la fonction qui décrit la trajectoire de la balle (le polynôme standard dira-t-on) s'annule. Plus les événements à décrire sont compliqués, plus on doit introduire de variables dans la fonction, chacune d'elles variant de façon continue jusqu'à ce que le système atteigne les points critiques (ceux pour lesquels il passe brusquement d'un état à l'autre). Pendant des siècles les mathématiciens ont calculé sur ces singularités. Il a fallu attendre la théorie des catastrophes pour avoir une nouvelle vision des discontinuités (voir *la Recherche* n° 82, p. 745, sept. 1977). La découverte fondamentale de R. Thom consiste à dire qu'à quelques exceptions près, sept catastrophes élémentaires suffisent pour interpréter les phénomènes. Chacune ne fait intervenir que quatre variables au maximum et peut être représentée dans ce que les physiciens appellent l'espace d'états ( $S$ ) à deux voire six dimensions. Dans ces espaces abstraits, la variation du système est traduite par le déplacement d'un point unique sur une surface continue de ( $S$ ). Il y a catastrophe lorsque le point est contraint à sauter d'une feuille de la surface sur une autre.

L'exemple du rebondissement d'une balle correspond à la catastrophe la plus simple de la classification : le pli (voir encadré fig. 1). Elle peut être matérialisée par une feuille de papier, pliée le long d'une ligne qui traverse la singularité de la courbe. Le comportement de la balle est décrit par un point qui suivrait cette courbe : lorsqu'il franchit le pli, la balle passe d'un état ascendant à un état descendant.

La catastrophe suivante est la fronce ou rebroussement. Elle est moins triviale parce que représentée dans un espace à trois dimensions. Les types suivants sont la queue d'aronde qui exige un espace de dimension 4 pour être topologiquement décrite ; le papillon, l'ombilic hyperbolique et elliptique (dimension 5) et enfin l'ombilic parabolique (dimension 6).

P.P.

sans échelle que l'on aurait dessinées sur une surface élastique.

Revenons maintenant à nos opticiens qui utilisent cette théorie. Il y a trois ans, ils ont reconnu au cours d'un examen visuel des configurations engendrées par la lumière dans l'eau ou le verre, certaines des catastrophes de Thom. Depuis, les travaux ont établi que la ressemblance n'était frappante qu'à l'échelle de résolution de l'œil, c'est-à-dire lorsque les caustiques constituent le trait dominant des images formées par des lumières à courte longueur d'onde sur des écrans, des plaques photographiques, la rétine, etc. (voir encadré 1). A petite échelle (microscopie), les caustiques s'ornent de figures de diffraction compliquées et à grande échelle (macroscopie) elles se combinent en configurations plus complexes qui mal résolues ne ressemblent en rien à une des sept catastrophes.

## Les caustiques : catastrophes optiques.

Quand on regarde la mer en plein soleil, de brillantes zones dansantes apparaissent en certains points de la surface de l'eau. En ces points « miroir », la lumière solaire se réfléchit en direction de l'œil de l'observateur. Au cours du temps, ces plages lumineuses se déplacent et à certains instants — les éclats — deux d'entre elles s'annihilent ou deux d'entre elles se créent. (3) La succession rapide de ces éclats explique l'apparence étincelante de la mer (fig. 1). Là où a lieu l'éclat, la surface de l'eau ne se contente pas de refléter la source solaire vers l'œil ; elle a, en plus, une courbure telle qu'elle concentre la lumière solaire sur une surface qui passe par l'œil. C'est précisément la surface caustique. Cet exemple illustre l'interprétation mathématique, selon la théorie des catastrophes, du phénomène optique de focalisation. Généralement la focalisation est introduite par une expérience simple : l'observation d'une lentille illuminée par le soleil. Derrière la loupe, les rayons lumineux convergent, en théorie, vers un point unique : le foyer (fig. 2 A). En fait, les rayons réfractés par la loupe ont une surface enveloppe (caustique) qui a un point singulier (cône effilé) ou foyer (fig. 2 B). Il y a focalisation à la surface des caustiques, c'est-à-dire que l'intensité du champ lumineux y devient infinie.

Considérons une surface réfléchissante (F) [fig. 2 B] et prenons la position d'un point de (F) comme variable d'état appartenant à un espace d'état  $S$ . Cette variable suffit pour



décrire à tout instant l'état du système considéré. Plaçons-nous en un point fixe  $P$  de l'espace. Les coordonnées de  $P$  constituent les variables de l'espace de contrôle  $\underline{C}$ . Illuminons alors la surface  $(F)$  par une source  $L$ . D'après le principe de Fermat, les rayons issus de  $L$ , réfléchis par  $(F)$  qui passent en  $P$  correspondent aux points  $M$  de  $(F)$  tels que la distance (optique) totale  $LM + MP$  soit constante quand  $M$  se déplace sur  $(F)$ . Pour un point ordinaire  $P$ , ces points  $M$  sont isolés (extréma simple) sur  $(F)$ . Par contre, il y aura focalisation sur une surface  $\Sigma$  si en un point de  $\Sigma$  deux au moins des points  $M$  viennent à

3

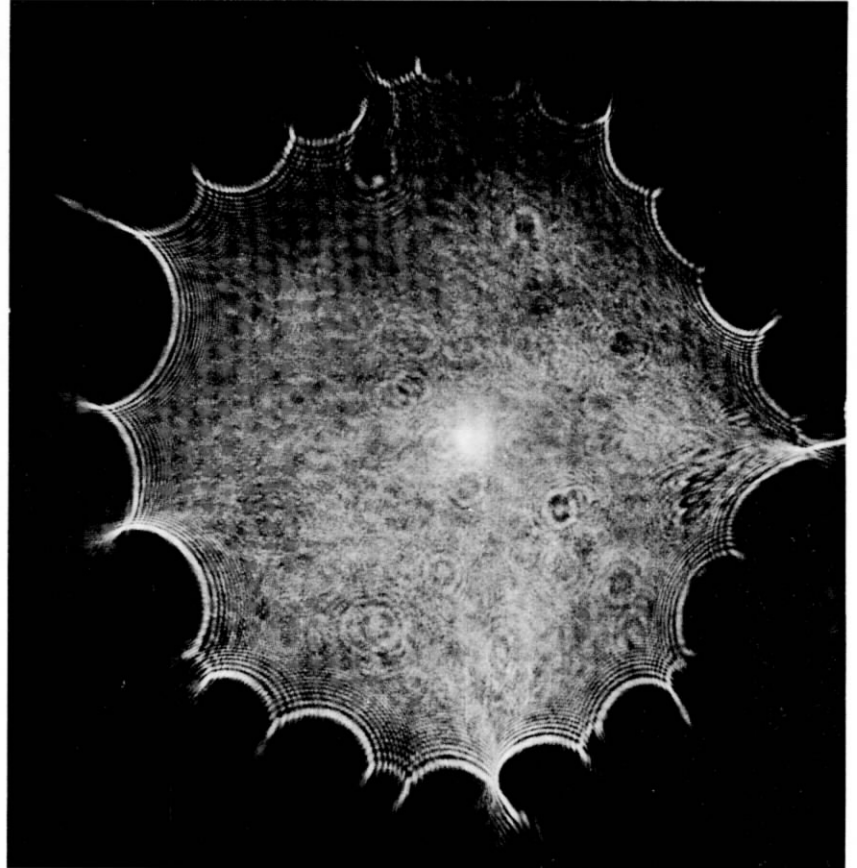
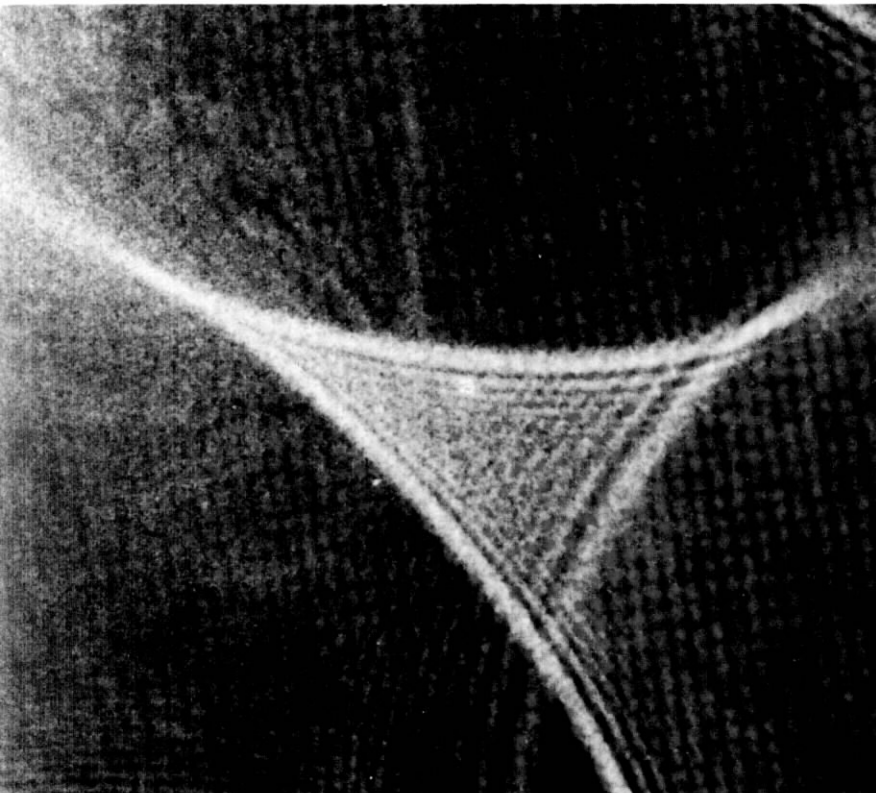


Figure 3. La forme d'une goutte d'eau étalée sur un verre est déterminée par les lois de la tension superficielle. Si le verre est poussiéreux, l'angle de contact de la goutte avec le plan de la vitre est variable le long de la courbe limite, et la goutte a un périmètre irrégulier. Si on l'emploie comme une lentille, elle réfracte la lumière derrière la vitre selon un faisceau réparti en un ou plusieurs cônes. Les sections planes d'un tel cône sont des courbes fermées constituées d'arcs qui présentent leur concavité vers l'extérieur. Ces arcs se joignent aux points froncés, les seules singularités génériques ponctuelles en dimension 2, selon la théorie.

4A



4B

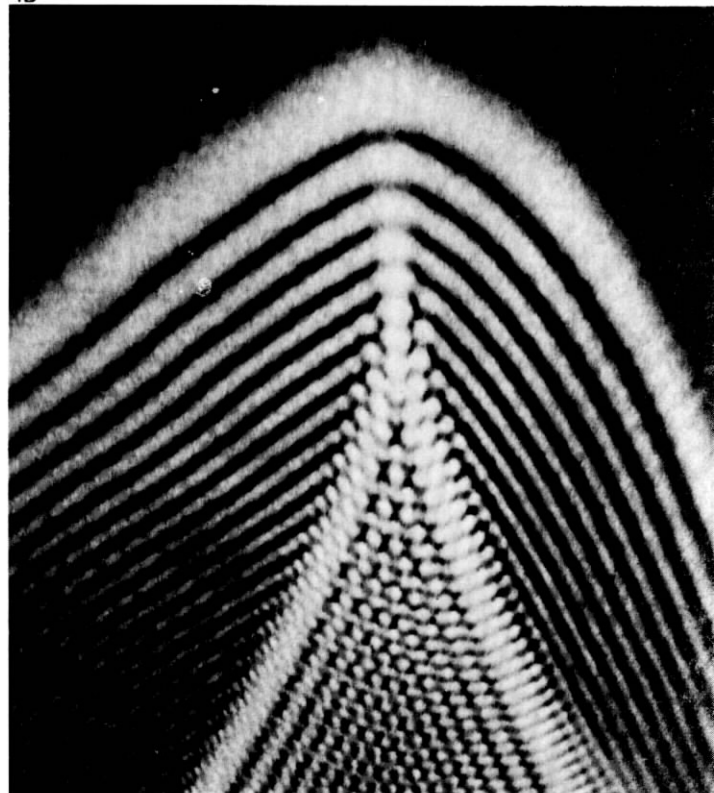


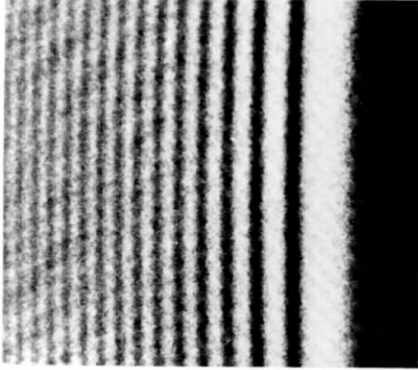
Figure 4. Sections planes des catastrophes de codimension 3.

4A. La queue d'aronde (A) a été observée derrière une goutte d'eau réfractante.

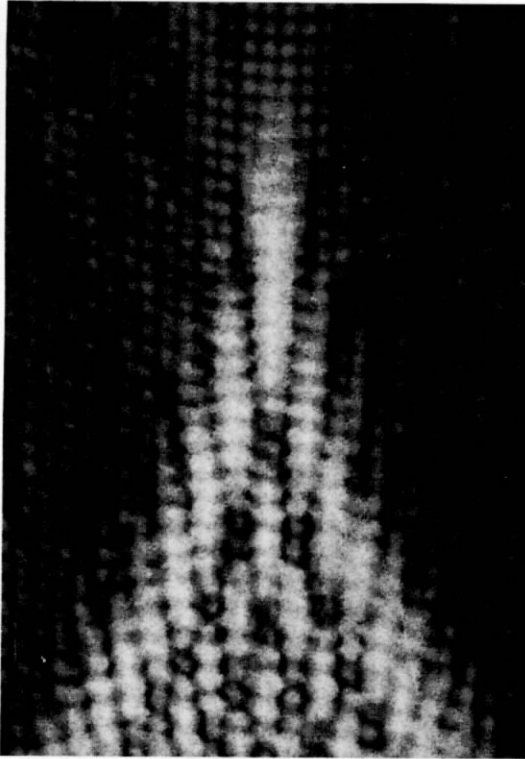
4B. L'ombilic hyperbolique (B) a été vu par transparence à travers une glace de verre épais. (Pour l'ombilic elliptique, voir figure 5C.)

Les rebroussements  
sont des points singuliers  
qui apparaissent  
dès que la topologie s'enrichit.

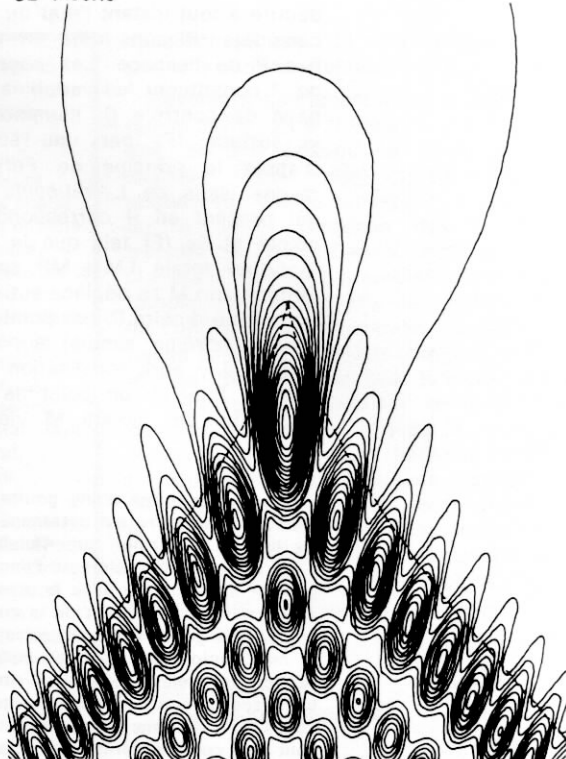
5A expérience



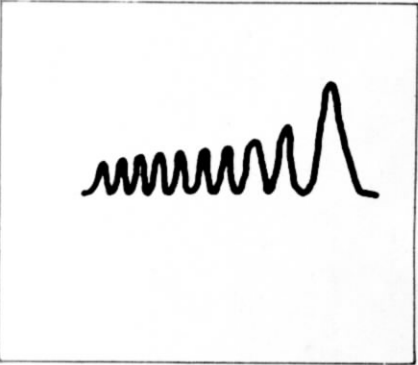
5B expérience



5B théorie



5A théorie



coïncider. Cet exemple est un cas particulier du schéma mathématique général, considéré en théorie des catastrophes élémentaires, d'une fonction  $f(\xi, \zeta)$  définie sur un espace d'état  $\xi$  et dépendant des variables de contrôle de  $\zeta$ . On dit alors que les singularités des caustiques sont engendrées par les singularités de la fonction distance optique.

Dans l'exemple du scintillement de la mer, les variables d'état sont les deux coordonnées spatiales  $(x, y)$  qui spécifient la position d'un point, alors que l'espace  $\zeta$  de contrôle est de dimension un, à savoir le temps  $t$ .

**Reconnaître le pli  
dans un arc-en-ciel,  
la fronce dans un bol de café.**

Nous n'avons pas encore dit qu'une singularité de fonction peut être plus ou moins *dégénérée*, or c'est cette propriété qui va nous permettre d'ordonner les différents types de singularités. Le critère sera le degré de dégénérescence. Il établit que la singularité d'une fonction  $(f_1)$  est moins dégénérée que celle d'une fonction  $(f_2)$  si  $(f_1)$  peut être obtenue à partir de  $(f_2)$  par une petite perturbation. La classification des singularités hiérarchisées selon leur degré de dégénérescence permet par conséquent de classer les singularités des caustiques. Dans le cas précis des caustiques structu-

rellement stables, on ne parle plus de degré de dégénérescence mais de codimension  $N$ , définie comme la différence des dimensions de l'espace  $\zeta$  de contrôle et de la caustique elle-même (voir encadré 1). Pour  $N = 1$ , nous avons la caustique-pli qui n'est topologiquement pas intéressante car, si la dimension de l'espace de contrôle est 1 (le temps par exemple), la caustique est réduite à un point. Si l'espace de contrôle est un plan (codimension 2) la caustique dessine une courbe. Si nous travaillons en codimension 3, la caustique est une surface... Dans le cas des éclats à la surface de la mer, la singularité génératrice est le pli.

Un autre exemple de caustique-pli est donné par l'arc-en-ciel. (4) Les variables de contrôle sont les deux angles qui déterminent la direction des rayons sortant de la goutte sphérique de pluie. Les variables d'état sont les coordonnées du point d'incidence du rayon lumineux sur la surface de la sphère.

Si la lumière est monochromatique, l'espace étant isotrope, la caustique des rayons réfléchis est une courbe circulaire à cause de la sphéricité de la goutte. A chaque longueur d'onde est associée une caustique donc pour tout le spectre solaire, l'observateur au sol voit une succession d'anneaux, fractions de cercles, de couleurs différentes. La caustique-pli de codimension 1 est une hypersurface régulière, sans singularités, comme un point sur une droite. (5) Si l'on veut voir appa-

Figure 5. Comparaison de la théorie et de l'expérience pour les trois catastrophes de diffraction. Dans tous les cas, on a utilisé des gouttes d'eau comme lentilles. L'intensité lumineuse a été calculée selon l'intégrale de diffraction du texte avec le polynôme standard de l'encadré 1 (A) figure du pli, (B) figure de la fronce, (C) figures obtenues par calcul sur ordinateur (par F.J. Wright) de deux sections de l'ombilic elliptique. Les photographies expérimentales ont été obtenues en (B) et (C) par J.F. Nye, à l'aide de gouttes dont le périmètre était un triangle.

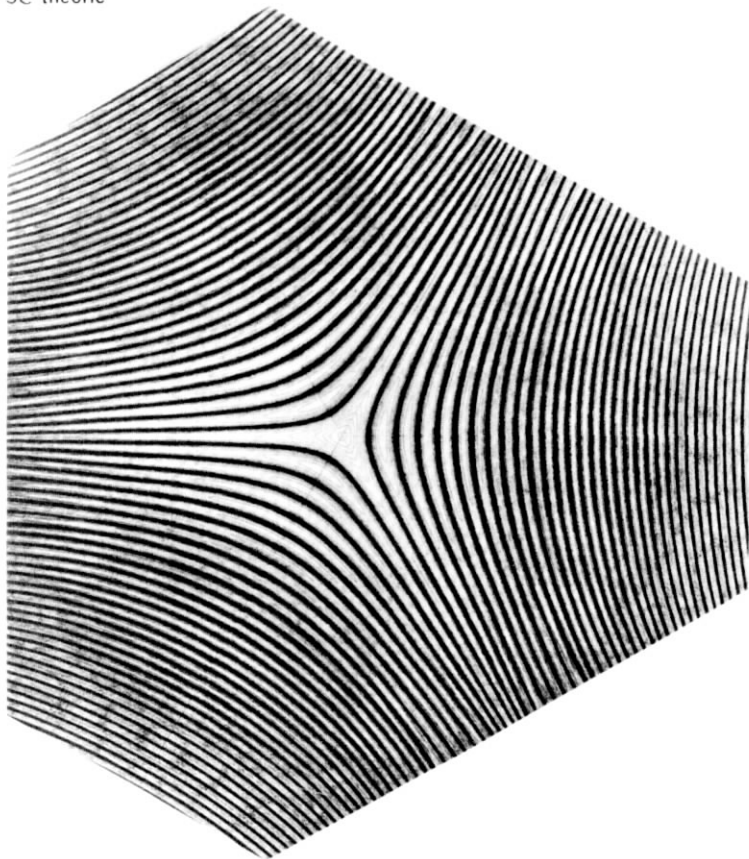
raître des topologies plus riches, il faut passer en codimension 2. Les caustiques peuvent alors avoir en plus des courbes de points plis réguliers, des points de rebroussement. Il n'y a pas d'autres formes structurellement stables. Ce résultat, loin d'être trivial, entraîne que les caustiques à points anguleux, les points foyers isolés, les courbes à point d'arrêt ne sont pas stables en dimension 2. Si en des situations particulières, ces singularités viennent à apparaître, alors la plus petite perturbation changera leur topologie et créera une caustique qui ne possède que plis et rebroussements. Ces rebroussements peuvent être vus par réflexion dans un bol de café éclairé au soleil. Ils dominent aussi les caustiques qui se dessinent lorsqu'on observe une lampe éloignée à travers une vitre sale parsemée de minuscules gouttes de pluie (fig. 3) ou que l'on envoie un faisceau laser sur

(3) M.S. Longuet-Higgins, *J. Opt. Soc. Amer.*, 50, 838, 845, 851, 1960.

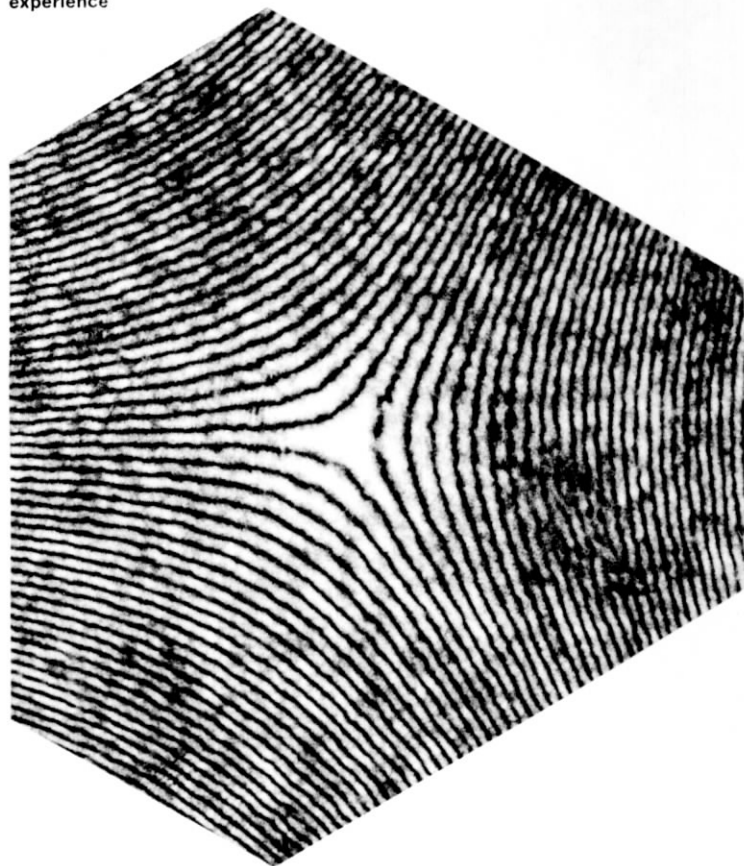
(4) H.M. Nussenzveig, *Scientific American*, 116, avril 1977.

(5) M.V. Berry, *Adv. in Phys.*, 25, 1, 1976.

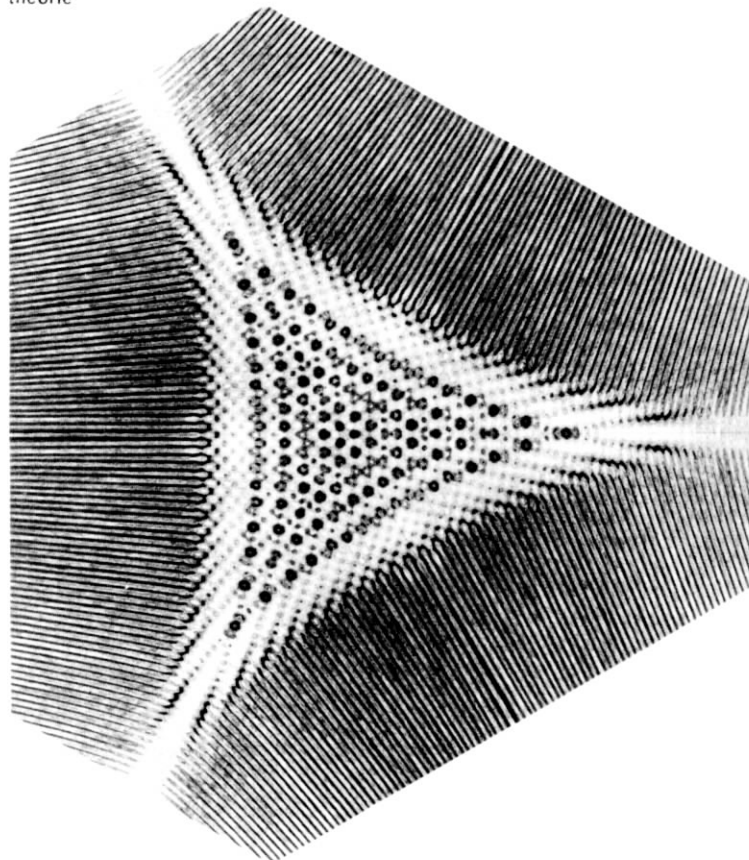
5C theorie



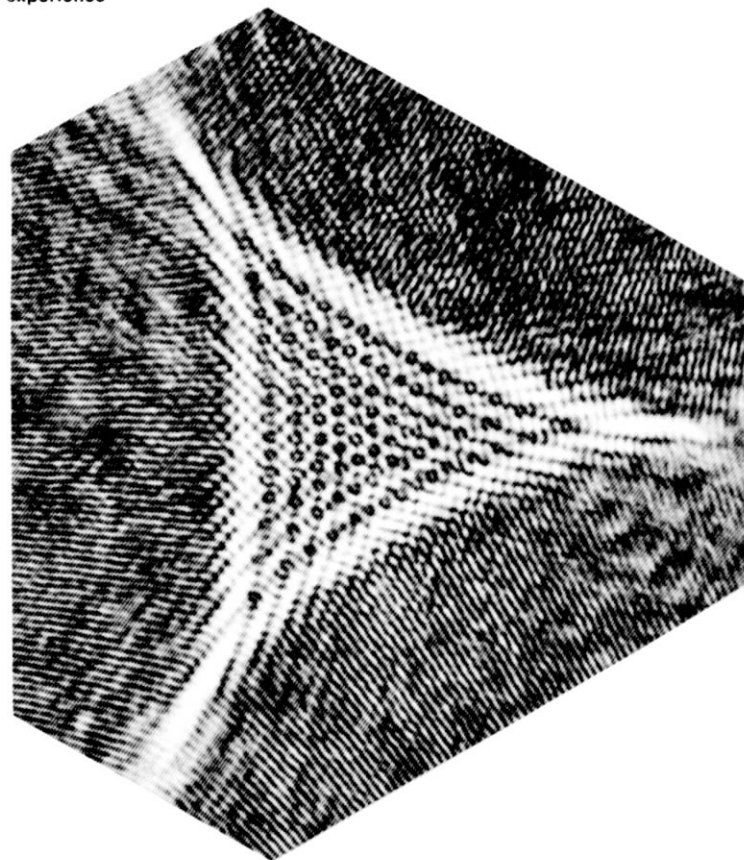
experience



theorie



expérience





6



la surface irrégulière du verre cathédrale et que l'image est formée sur le mur d'une chambre obscure.<sup>(5)</sup>

Les caustiques de codimension 3, obtenues par réfraction ou par réflexion sur certains objets, donnent naissance à des points singuliers. On reconnaît aisément à la forme caractéristique de leurs sections planes, la queue d'aronde (fig. 4 A), les ombilics hyperbolique (fig. 4 B) et elliptique (fig. 5 C).

Les études théoriques et expérimentales menées actuellement par l'auteur et ses collaborateurs s'efforcent de spécifier comment les caustiques se déploient dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , au voisinage d'une goutte d'eau<sup>(6)</sup> ou d'une vitre à surface simple sans la moindre propriété de symétrie.<sup>(7)</sup> Pour ce faire, ils calculent sur les polynômes standard qui ne sont que l'expression explicite des déploiements des singularités et comparent les figures expérimentales et simulées. Le concept de déploiement mérite une explication : étant donné une singularité dégénérée  $f(S, C)$ , la totalité des singularités moins dégénérées qui s'en déduisent par perturbation forme une famille de fonctions définies sur l'espace  $\mathbb{C}$  des paramètres. Cette famille constitue le *déploiement* de la singularité  $f$ . Si l'on dispose de plus de paramètres, par exemple en déplaçant les objets réfléchissants, on peut créer des catastrophes de codimension supérieure. La

(6) J.F. Nye, *Proc. Roy. Soc.*, A 361, 21, 1978.

(7) M.V. Berry, J.F. Nye, *Nature*, 267, 34, 1977.

(8) J.J. Duistermaat, *Comm. Pure App. Math.*, 27, 207, 1974.

(9) H. Trinkaus, F. Drepper, *J. Phys. A.* 10 L11, 1977.

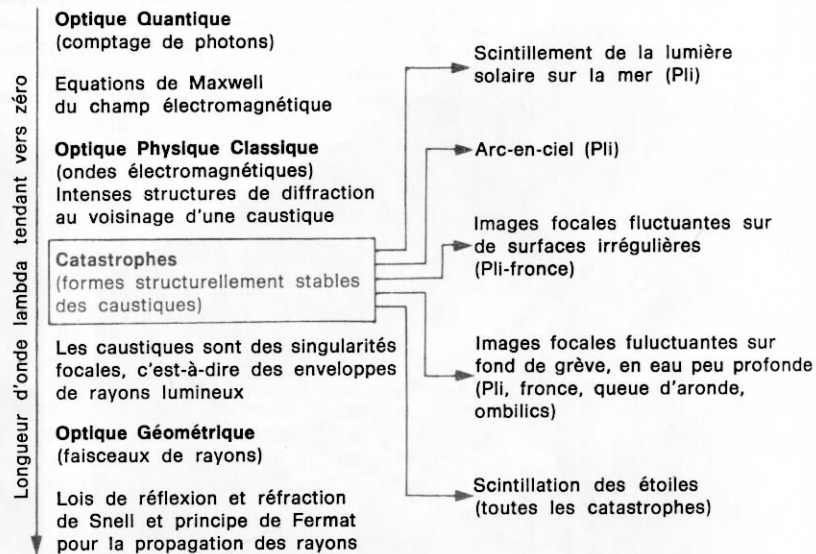
(10) G.B. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc. Math. Phys. Sci.*, 6, 379, 1838.

(11) T. Pearcey, *Phil. Mag.*, 37, 311, 1946.

(12) M.V. Berry, J.F. Nye, F.J. Wright, à paraître.

(13) J.F. Nye, M.V. Berry, *Proc. Roy. Soc.*, A336, 165, 1974.

## 2. Les théories de la science de la lumière :



En science de la lumière, les théories sont loin d'être unifiées. Selon la longueur d'onde ( $\lambda$ ), de la lumière considérée, le caractère ondulatoire prévaudra ou ne prévaudra pas sur le caractère géométrique. De ce fait, chaque théorie est adaptée à un phénomène précis et en rend compte par un système de lois ou de formalismes qui lui est propre. La situation se complique dans le domaine intermédiaire, lorsque  $\lambda$  tend vers zéro. C'est précisément là qu'apparaissent les caustiques et que la théorie des catastrophes devient précieuse. Nous avons indiqué cinq exemples de catastrophes optiques naturelles ou produites artificiellement au laboratoire. L'article commente les recherches menées par les physiciens opticiens pour simuler par le calcul ces configurations lumineuses, connues depuis longtemps.

Figure 6. Réseau des caustiques sur fond de grève. On ne voit pas les fronces prévues par la théorie, parce que les détails des caustiques sont rendus flous par leur rapide déplacement, et la superposition des caustiques dus au caractère non ponctuel de la source solaire (— de diamètre apparent). Avec cette résolution grossière certaines formes non catastrophiques comme les points triples apparaissent comme éléments structurellement stables. La complexité de ces réseaux pourrait provenir du fait que la surface de l'eau possède elle-même des aspérités appartenant à différentes échelles de grandeur.

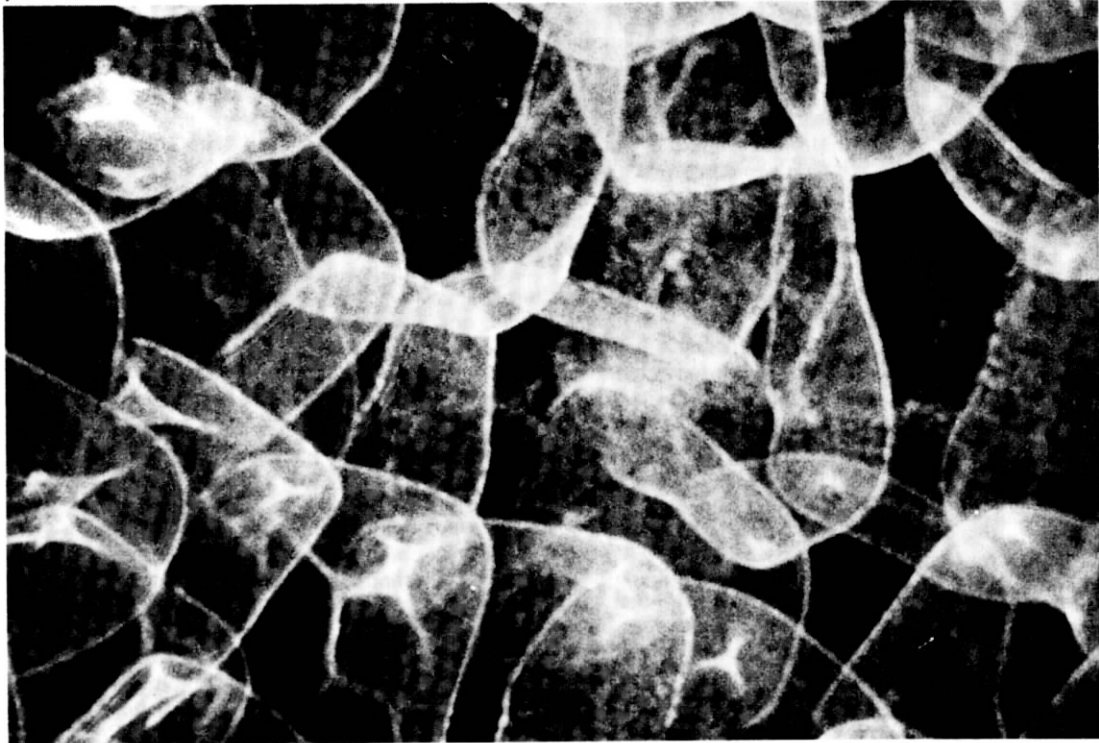
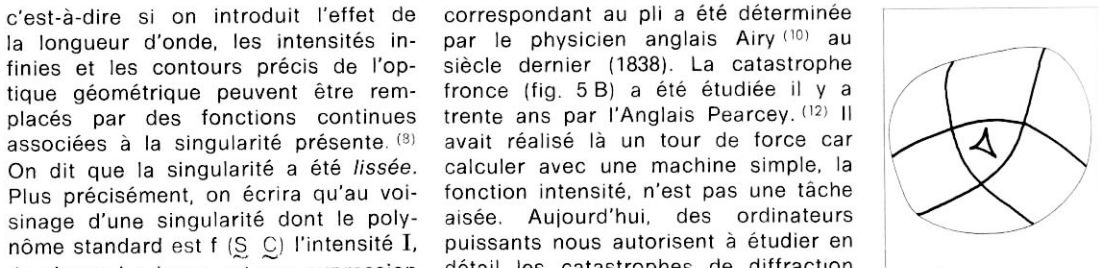


Figure 7. Caustiques d'un faisceau laser réfracté par un verre-cathédrale épais. On peut voir les détails de la structure fine des points triples, résolues en plis et en fronces. La structure cellulaire est ici plus claire que sur la figure 6, probablement parce que le verre n'a d'irrégularités que d'une seule taille.



liste de Thom s'arrête à  $N = 4$ , mais Arnol'd l'a étendue considérablement. Les catastrophes prolifèrent rapidement en nombre et complexité lorsque  $N$  s'accroît et il n'y a apparemment aucune règle pour engendrer toute la hiérarchie. On la découvre de façon empirique, ce qui fait dire à Arnol'd : « En son état actuel, la théorie des singularités est une science expérimentale. »

**« Revêtir de chair ondulatoire, le squelette de l'optique géométrique. »**

La nature ne fait pas de distinction au cours de ses manifestations phénoménologiques entre un rayon lumineux et une onde lumineuse. La citation du Russe Kinber (ci-dessus) traduit très bien cette dualité. Elle évoque le rapport entre les figures de diffraction de l'optique ondulatoire et la famille des rayons lumineux qui leur est associée en optique géométrique. L'idée est la suivante : ne peut-on pas utiliser le « squelette » fourni par les caustiques, enveloppes des rayons lumineux, au lieu de résoudre directement les équations de l'optique ondulatoire (équations de Maxwell) ? Cette tentative est d'autant plus nécessaire que la longueur d'onde tend vers zéro, c'est-à-dire que la fonction d'onde a une fréquence infiniment grande. En effet les calculs deviennent alors quasiment impossibles mais heureusement on démontre (5) qu'à petite échelle,

c'est-à-dire si on introduit l'effet de la longueur d'onde, les intensités infinies et les contours précis de l'optique géométrique peuvent être remplacés par des fonctions continues associées à la singularité présente. (8) On dit que la singularité a été lissée. Plus précisément, on écrira qu'au voisinage d'une singularité dont le polynôme standard est  $f(S, C)$  l'intensité  $I$ , du champ lumineux est une expression asymptotique sur  $C$ . Puisque l'optique géométrique établit que l'intensité du champ lumineux sur une caustique est infinie (pour  $\lambda = 0$ ), pour  $\lambda$  tendant vers zéro, on s'efforcera d'exprimer

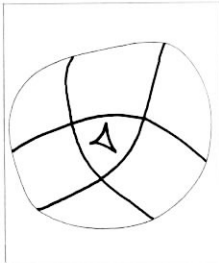
$$I(\lambda) \text{ en fonction de } \frac{1}{\lambda}$$

Selon la théorie mathématique,  $I(\lambda)$  est donnée par une quantité proportionnelle au carré d'une intégrale de diffraction étendue aux variables de longueur, à savoir :

$$I(\lambda) = |\lambda^{-m/2} \int \dots \int d^m s e^{2i\pi f(s, c)/\lambda}|^2$$

où  $m$  est la dimension du front d'onde. Ces intégrales définissent une hiérarchie de fonctions nouvelles (*catastrophes de diffraction*) (9) qui (sauf dans le cas le plus simple de la catastrophe pli) ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions transcendantales usuelles (série hypergéométrique, Bessel, Legendre, etc.). Le seul intérêt de cette description mathématique est que l'on peut calculer la valeur de ces fonctions et comparer le résultat aux données expérimentales (fig. 5). La fonction

correspondant au pli a été déterminée par le physicien anglais Airy (10) au siècle dernier (1838). La catastrophe fronce (fig. 5 B) a été étudiée il y a trente ans par l'Anglais Pearcey. (12) Il avait réalisé là un tour de force car calculer avec une machine simple, la fonction intensité, n'est pas une tâche aisée. Aujourd'hui, des ordinateurs puissants nous autorisent à étudier en détail les catastrophes de diffraction de codimension 3. L'ombilic elliptique (12) par exemple (fig. 5 C) fait montre d'une structure compliquée de maximums d'intensité empilés dans l'espace comme les atomes d'un cristal à symétrie trigonale déformé. Chaque maximum est entouré d'une « ligne de dislocation », (13) en forme de boucle froncée, sur laquelle l'intensité est nulle.



Les catastrophes de diffraction sont un outil précieux pour décrire quantitativement comment la lumière s'accumule sur les caustiques. Qualitativement, on constate sur la figure de diffraction que les franges s'écartent quand on s'approche de la caustique. Mathématiquement, on traduit cette observation en écrivant que la distance entre deux maximums voisins (soit deux franges brillantes) est proportionnelle à  $\lambda$  loin de la caustique mais s'accroît en  $\lambda^\alpha$ ,  $\alpha < 1$  au voisinage immédiat de la caustique.

D'ores et déjà nous pouvons constater que la théorie des catastrophes apporte plus à l'optique que la simple description de la convergence des



## Généricité et stabilité structurelle : deux concepts prometteurs pour aborder la symétrie du monde.

rayons vers un foyer. Elle souligne l'importance des caustiques, lieu des points où la diffraction est la plus intense et la moins rapidement oscillante, en même temps qu'elle explique la structure fine des figures de diffraction.

### Quand la lumière traverse une nappe d'eau en mouvement.

Si maintenant on ne considère plus la surface de la mer, mais le fond, on observe que les jeux de lumière conduisent à la formation de configurations lumineuses sur le sable. Le phénomène physique invoqué ici n'est plus la réflexion mais la réfraction. Ainsi, les lignes lumineuses que l'on voit se dessiner sont des caustiques de réfraction formées par les vagues ondulantes irrégulièrement la surface de l'eau. Pour une telle surface — qui n'a aucune symétrie — les arguments de stabilité impliqueraient en principe que la caustique ne présente que des rebroussements (fronces) et de fait, on peut parfois en apercevoir quelques-uns. Cependant, en règle générale, les conditions optiques sont si mauvaises que les fronces ne sont pas apparentes. Plus souvent, les lignes caustiques semblent se réunir en points triples pour former des réseaux compliqués (fig. 6) dont la riche topologie fluctuante est difficile à analyser. Les points triples sont des illusions : en réalité il s'agit d'une structure compliquée contenant plusieurs fronces et dominée par l'ombilic elliptique, la queue d'aronde et parfois même des catastrophes de plus haute codimension. Ce résultat a clairement été établi expérimentalement<sup>(7)</sup> en formant la caustique donnée par une « lentille » de verre sculptée de manière à simuler la rencontre de trois crêtes de vague. Une expérience semblable de modélisation, employant une vitre irrégulière pour simuler les vagues de la surface de l'eau (fig. 7) montre la structure des singularités d'un réseau de caustiques.

Ces caustiques *aléatoires* apparaissent aussi dans la lumière des étoiles réfractée par la turbulence de l'atmosphère. Un observateur au sol reçoit une intensité lumineuse  $I(t)$  qui fluctue avec le temps. On dit que l'étoile scintille. Une compréhension quantitative de ces fluctuations requiert apparemment une étude plus approfondie de la théorie des catastrophes en optique. Aucune des applications présentées ici n'atteint ce stade, mais des travaux théoriques aujourd'hui en cours débouchent sur des développements nouveaux en optique statistique. Sans entrer dans le détail des calculs des distributions<sup>(14)</sup> nous pouvons dire que

des anomalies ont été constatées, notamment tous les moments de la distribution d'intensité sont supérieurs à ceux que donnerait la classique distribution statistique gaussienne. Ceci vient des fluctuations violentes d'intensité provoquées par les caustiques qui rencontrent l'œil de l'observateur. En optique géométrique, compte tenu que l'intensité lumineuse est infinie sur les caustiques, on s'attend à trouver des valeurs infinies, pour une longueur d'onde  $\lambda$  nulle. Ici, nous sommes obligés de nuancer en disant que les valeurs élevées qui sont obtenues proviennent de catastrophes de diffraction qui lissent les singularités des caustiques lorsque  $\lambda$  est petite mais non nulle.

Une analyse raffinée<sup>(15)</sup> montre que chaque moment est *dominé* par une catastrophe spécifique de la hiérarchie étendue aux valeurs élevées de la codimension. Ce résultat remarquable s'explique physiquement : au voisinage de tout point il va se produire, au bout d'un temps assez long mais fini, des catastrophes de codimension arbitrairement grande. Ces catastrophes de grande codimension vont causer des fluctuations d'intensité d'autant plus grandes et vont devenir dominantes. Donc ce genre d'approche joue le rôle d'un « singulariscope » pour détecter les catastrophes supérieures sans décrire toutefois leur topologie.

Avant d'aborder les retombées de la théorie des catastrophes, nous pou-

vons dégager de notre étude des configurations lumineuses en onde courte ( $\lambda \rightarrow 0$ ) que les formes s'organisent, selon le degré de résolution sous lequel on les examine. A l'échelle la plus fine, il y a les catastrophes de diffraction dont les textures (fig. 5) appartiennent à un nombre fini de types. A l'échelle la plus grossière, les caustiques forment des réseaux (fig. 6) qui évoquent d'autres configurations naturelles (fissures du sol, mousse savonneuse, etc.) dans lesquels les points triples apparaissent de manière stable. Entre ces deux extrêmes, il y a les catastrophes élémentaires. Elles organisent la macrostructure des configurations de diffraction et constituent la structure fine des réseaux de caustiques (fig. 7) : elles forment ainsi l'échelle moyenne.

Il est curieux de constater que les configurations à grande échelle correspondent souvent à des catastrophes associées à des phénomènes qui évoluent de façon irréversible vers une situation stable. Au contraire, l'optique ondulatoire décrit des systèmes qui oscillent entre des positions extrêmes et qui de ce fait correspondent à une dynamique réversible.

### Au-delà de l'optique.

La théorie des catastrophes élémentaires conduit à la découverte et à l'analyse de tout un domaine de faits nouveaux en optique, et vient enrichir l'étude traditionnelle menée avec des instruments optiques construits avec la plus grande symétrie possible. En effet, ces phénomènes nouveaux ont les caractéristiques, peu banales dans la physique d'aujourd'hui, d'apparaître en milieu naturel, où tout un chacun peut les observer et d'être structurellement stables et très peu symétriques.

Bien entendu, les formes que nous avons discutées n'apparaissent pas qu'en optique. On peut les trouver dans toutes les théories ondulatoires de la physique, en acoustique, en hydrodynamique et notamment en mécanique quantique.<sup>(16)</sup>

Par ailleurs, la théorie modélisant les caustiques aléatoires présente des analogies séduisantes avec la technique du groupe de renormalisation<sup>(17)</sup> due à Wilson (voir *la Recherche* n° 51, p. 1022, déc. 1974).

Pour les physiciens, l'originalité et le contenu prometteur de la théorie des catastrophes résident dans l'introduction des concepts de généricité et de stabilité structurelle. Ils permettent une approche nouvelle des détails de la symétrie brisée à condition toutefois que les symétries concernées puissent être abordées dans ce cadre mathématique.

## Pour en savoir plus :

- R. Thom, « *Stabilité structurelle et morphogénèse* », Benjamin, 1972.
- T. Poston, I. Stewart, *Catastrophe theory and its applications*, Pitman, 1978.
- M. Minnaert, *The nature of light and colour in the open air*, Dover, 1954.

(14) E. Jakeman, E.R. Pike, P.N. Pusey, *Nature*, 263, 215, 1976.

(15) M.V. Berry, *J. Phys. A*, 10, 2061, 1977.

(16) M.V. Berry, *J. Phys. A*, 10, 2083, 1977.

(17) G. Toulouse, P. Pfeuty, *Introduction au groupe de renormalisation et ses applications*, Presses universitaires de Grenoble, 1975.