

IPOTESI DI SCALA E FLUTTUAZIONI NON GAUSSIANE NELLA TEORIA CATASTROFISTA DELLE ONDE

di Michael Berry*

1. Introduzione

Le applicazioni e le illustrazioni della teoria delle catastrofi in fisica sono ormai molte e multiformi, e di recente in vari libri (Poston e Stewart, 1978; Gilmore, 1981) e articoli (Stewart, 1981) esse sono state passate in rassegna estesamente. Io non tenterò di riassumere questa ampia letteratura, ma invece mi concentrerò su un gruppo di argomenti imperniati sull'origine e le applicazioni delle leggi di scala nella teoria delle onde corte.

Vi sono molte ragioni che rendono sensato occuparsi di questo argomento. La prima ragione è che la teoria ingloba in modo nuovo due temi di cui la fisica teorica si è molto occupata, cioè l'ipotesi di scala e le fluttuazioni non gaussiane. L'ipotesi di scala è una espressione del fatto che alcune quantità fisiche possono dipendere da altre non analiticamente. Questa circostanza è comune soprattutto nei cambiamenti di fase (Stanley, 1971), ove le proprietà termodinamiche nei punti critici sono funzioni non analitiche della temperatura. Nel presente lavoro la maggior parte delle leggi di scala riguarderanno il limite delle onde corte, in cui il numero d'onda k ($= 2\pi/\text{lunghezza d'onda}$) diviene infinito o (nel limite semiclassico della meccanica quantistica) la costante di Planck \hbar scompare. Le fluttuazioni non gaussiane avvengono in variabili casuali o funzioni governate da processi con alto grado di mutua correlazione, così che il teorema del limite centrale non può essere applicato. Esempi famigliari sono le distribuzioni stabili della teoria delle probabilità (Jona-Lasinio, 1975) e certi disturbi *frattali* (Mandelbrot, 1982). I miei esempi sono poco famigliari e implicano ampie fluttuazioni per cui le quantità

* Traduzione di Roberto Maiocchi.

statistiche (come i momenti) possono scalare in modi dominati da *competizione tra singolarità* (come nelle catastrofi).

La seconda ragione è che la teoria fa un uso *essenziale* di concetti caratteristici della teoria delle catastrofi. Questo uso essenziale va opposto all'uso « in linea di principio » che è così comune quando la teoria delle catastrofi è addotta al di fuori della fisica (e che ha dato origine a varie controversie — vedi Sussmann, 1975; Zahler e Sussmann, 1977, e la susseguente corrispondenza in *Nature*, 270 (1977), 381-383, 658). I concetti caratteristici sono anzitutto la stabilità strutturale di certe classi di universalità di singolarità, e in secondo luogo la gerarchia di forme normali che rappresentano le singolarità in ogni classe.

La terza ragione è che questo insieme di argomenti costituisce una delle applicazioni meno note della teoria delle catastrofi. Gli argomenti sono ancora nella fase iniziale di studio ed è probabile che molto resti da scoprire per ricercatori ricchi di immaginazione.

Lo schema di questo articolo è il seguente. La sezione 2 contiene una breve sintesi della teoria delle catastrofi delle onde. La sezione 3 è dedicata alle leggi di scala che esprimono la non analiticità di onde corte. La sezione 4 inserisce la casualità nell'asintotica e così introduce l'idea centrale di *fluttuazioni forti dominate da singolarità* derivando le leggi di scala per i momenti dell'intensità dell'onda. La sezione 5 descrive le estensioni delle leggi di scala alle trasformate di Fourier delle funzioni d'onda, che sono applicate alle fluttuazioni nelle forze d'impulso diffratte e nelle singolarità spettrali. La sezione 6 contiene un esempio da prendere con cautela, interessante nel suo giusto contesto, di un problema asintotico (odori debolmente diffusi da venti casuali), che dal punto di vista matematico è a prima vista molto simile a quello delle onde corte, ma il cui comportamento statistico è dominato da singolarità molto differenti dalle catastrofi.

2. Onde corte come catastrofi di diffrazione

Consideriamo un'onda monocromatica con numero d'onda k , rappresentata da una funzione d'onda scalare $\Psi(C; k)$, ove C è una notazione abbreviata per quelle quantità C_1, C_2, \dots da cui le onde dipendono, come il tempo, le coordinate di posizione, o i parametri che descrivono gli oggetti diffrangenti o i mezzi rifrangenti. Nel linguaggio della teoria delle catastrofi C sono i *parametri di controllo*. Assumeremo che Ψ soddisfi una equazione d'onda lineare con condizio-

ni al contorno. Questa assunzione è assai ampia e include l'ottica, la meccanica quantistica, l'acustica, l'elasticità e le onde nell'acqua di piccola ampiezza.

Il limite delle onde corte è $k \rightarrow \infty$. Esso non è banale perché Ψ è una funzione non analitica di $1/k$, con una singolarità essenziale in $1/k = 0$. Nella meccanica quantistica, per esempio, non è possibile sviluppare funzioni d'onda in serie di Taylor nella costante di Planck \hbar che abbiamo la meccanica classica come termine principale. Così la connessione tra la meccanica classica e quella quantistica è molto più complicata della connessione tra la relatività speciale e la meccanica newtoniana, che rappresenta semplicemente una questione di sviluppo di potenze di v/c (la velocità relativa del sistema di riferimento divisa per la velocità della luce).

L'asintotica deve dare la descrizione matematica corretta di tre fatti ovvi dal punto di vista fisico. In primo luogo $\Psi(C; k)$ deve essere costruita nei termini delle *traiettorie* del corrispondente problema hamiltoniano (per esempio raggi di luce o percorsi di particelle newtoniane). In secondo luogo nel gruppo *caustico* o focale, che è sull'involuppo dei raggi che rappresentano l'onda, Ψ deve salire a valori elevati, che divergono per $k \rightarrow \infty$. In terzo luogo la scala delle frange di diffrazione nello spazio C deve scomparire per $k \rightarrow \infty$.

Un elemento cruciale nella formulazione della asintotica in accordo con questi tre criteri è il riconoscimento che un'onda non corrisponde a una traiettoria, ma a una *famiglia* di traiettorie; ci si deve ricordare l'osservazione di Dirac (1951): « presumibilmente la famiglia ha qualche profondo significato in natura, non ancora compreso adeguatamente ». Differenti traiettorie possono passare attraverso differenti punti C , e più di una traiettoria può passare per un dato punto C . Per classificare le traiettorie in una famiglia impieghiamo variabili $s = \{s_1, s_2, \dots\}$ che nella terminologia della teoria delle catastrofi sono le *variabili di stato*. Esse possono rappresentare, ad esempio, punti in cui le traiettorie intersecano un fronte d'onda iniziale, o direzioni di traiettorie in un istante di tempo. Le differenti traiettorie passanti per un punto saranno indicate con $s^\mu(C)$ ($\mu = 1, 2, \dots$).

Le traiettorie $s^\mu(C)$ sono determinate dalla dinamica del raggio. Questa è governata da equazioni derivate da una funzione hamiltoniana (la cui generalizzazione per mezzo di operatore genera l'equazione d'onda soddisfatta da $\Psi(C; k)$). Qui sarà necessario solo richiamare il fatto che la dinamica del raggio può anche essere dedotta da un principio variazionale che può essere espresso nel modo se-

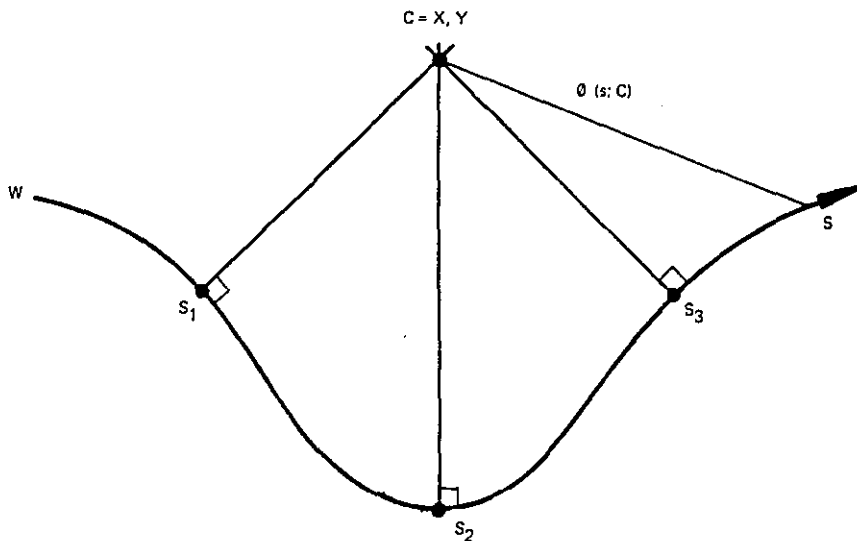


Fig. 1 - Distanza ottica $\phi(s; C)$ da s su un fronte d'onda W al punto di controllo C ; sono anche illustrate tre traiettorie per le quali ϕ è stazionario

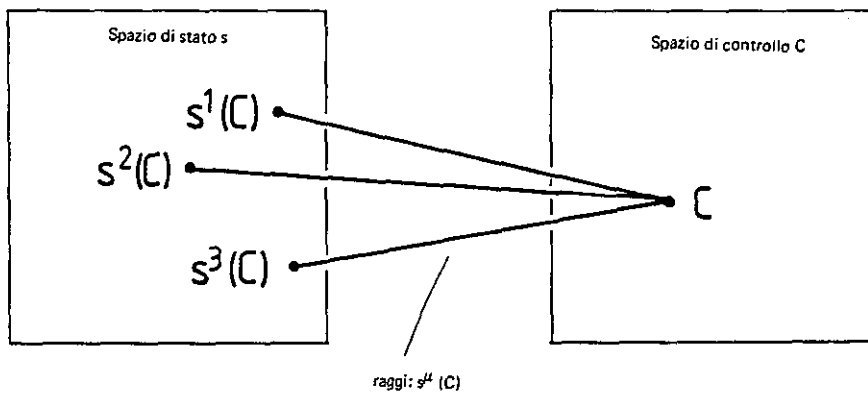


Fig. 2 - Mappa di gradiente polivalente dallo spazio di stato allo spazio di controllo, indotta da raggi $s^u(C)$

guente: esiste una funzione della distanza ottica (o funzione dell'azione) $\phi(s; C)$ i cui valori stazionari $s^u(C)$ sono i raggi. Così:

$$\partial\phi/\partial s_i(s; C) = 0 \quad \forall i \quad \text{se } s = s^u(C) \quad [1]$$

Un esempio elementare di questo modo di formulare la dinamica del raggio è l'evoluzione dei raggi da un fronte d'onda curvo W in un piano riempito da un mezzo isotropo omogeneo (fig. 1). C corrisponde alla posizione X, Y nel piano, s è una coordinata sul fronte d'onda, e ϕ è la distanza da C a s su W . È chiaro che la [1] semplicemente esprime la condizione che in queste circostanze i raggi sono linee rette normali a W .

Nella terminologia delle catastrofi [1] afferma che i raggi sono determinati da una *mappa di gradiente* (fig. 2) da s a C .

Le *caustiche* sono involuppi della famiglia di raggio descritta da $\phi(s; C)$ e sono definite come singolarità nello spazio C della mappa gradiente [1], cioè le ipersuperfici attraverso cui il numero di raggi cambia improvvisamente. La condizione per quanto sopra è che ϕ sia stazionario per ordini più elevati, in modo che oltre alla [1] deve valere anche l'equazione:

$$\det \{ \delta^2\phi / (\delta s_i \delta s_j) \} = 0 \quad [2]$$

Ciò è illustrato per il nostro semplice esempio nella fig. 3, che mostra la famiglia di raggi normali a W . In punti come A tre raggi passano per un punto, in punti come B ne passa uno solo. L'insieme separatore è la caustica, in questo caso una curva a cuspide i cui punti soddisfano alla condizione focale, che deriva dalla [2], di giacere nel luogo dei centri di curvatura di W .

Le caustiche organizzano la molteplicità dei valori della famiglia di raggio. Nello spazio $s \times C$ le differenti soluzioni $s^u(C)$ si congiungono a formare una superficie regolare chiamata *molteplicità critica*, le cui pieghe sullo spazio di controllo C corrispondono ai raggi. Questo è illustrato per il nostro esempio dalla fig. 4.

La ragione dell'introduzione della funzione $\phi(s; C)$ è che così come essa genera raggi e caustiche, analogamente genera funzioni di onda $\Psi(C; k)$ nel limite $k \rightarrow \infty$ delle onde corte. Un'analisi asintotica conduce alla seguente rappresentazione integrale:

$$\Psi(C; k) \approx (k/2\pi)^{n/2} \int d^n s \ a(s; C) e^{ik\phi(s; C)} \quad [3]$$

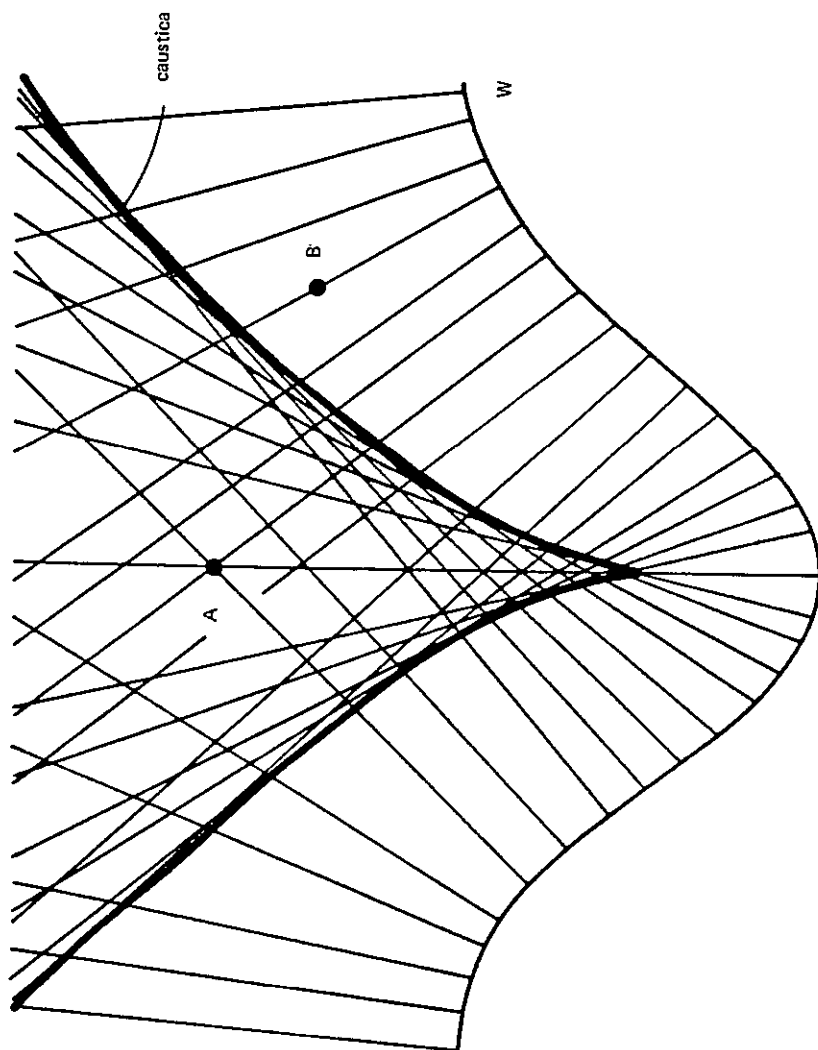


Fig. 3 - Caustica a cuspidi formata quale involuppo di traiettorie (normali) da un fronte d'onda W; tre traiettorie raggiungono A, una raggiunge B

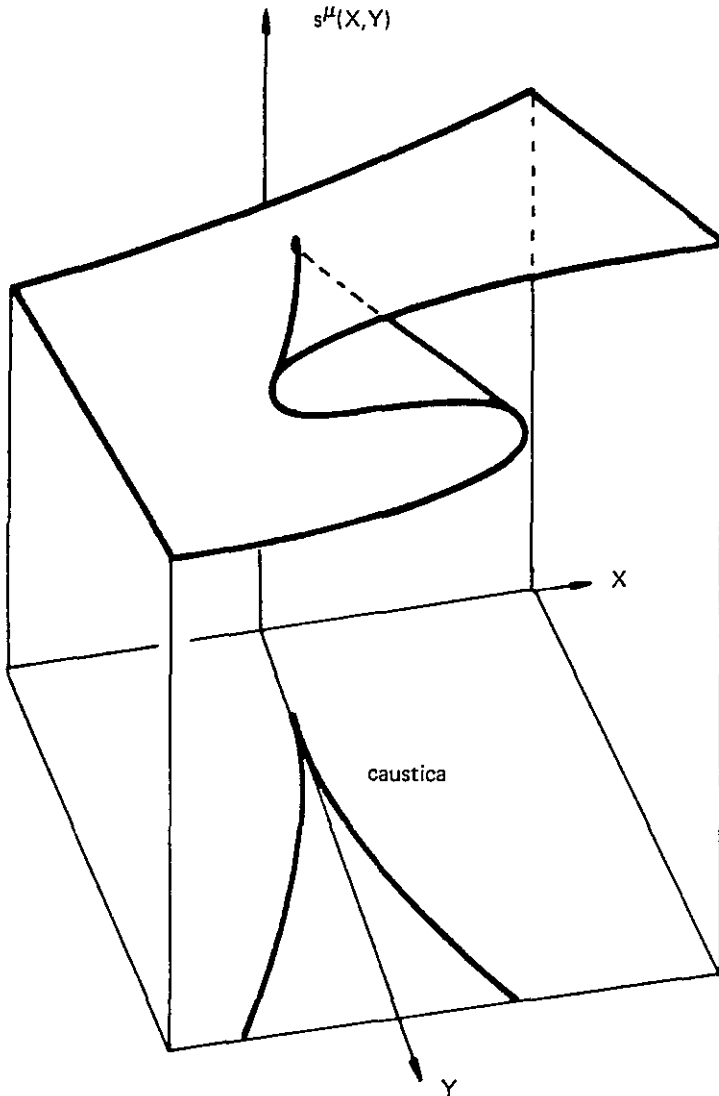


Fig. 4 - Caustica della fig. 3 formata per proiezione di molteplicità critica nello spazio s, C

In questa equazione n è il numero delle variabili di stato ed a è una funzione regolare di s e C dipendente dalla famiglia di raggio. L'integrale [3] generalizza un certo numero di modi di sviluppo, gli integrali di diffrazione di Kirchoff e le rappresentazioni con trasformata di Fourier (la cui varietà è una conseguenza dell'arbitrarietà esistente nella interpretazione di s), che divengono tutti equivalenti al limite delle onde corte. La derivazione di simili approssimazioni e dei loro termini correttivi è stata posta su basi ben salde da Maslov, in ricerche discusse da Kravtsov (1968), Duistermaat (1974) e nel libro di Maslov e Fedoriuk (1981). Delle rappresentazioni intuitive sono state fornite da Berry (1976, 1981) e Berry e Upstill (1980). I fisici troveranno che la [3] ricorda gli integrali di Feynman, che sono rappresentazioni esatte di Ψ come « sovrapposizione » in cui s è a dimensione infinita e ϕ è un funzionale; questo punto di vista è ben rappresentato da Schulman (1981).

Per grandi valori di k l'integrando nella [3] è una funzione di (s) a oscillazione rapida ed è sconsigliabile in pratica il calcolo diretto dell'integrale. È naturale tentarne una valutazione approssimata con il metodo di fase stazionaria, che consiste nello sviluppo di ϕ al secondo ordine attorno ai suoi punti stazionari, che sono precisamente i raggi $s^\mu(C)$ definiti dalla [1]. Questo procedimento dà:

$$\Psi(C; k) \approx \sum_{\mu} \left[\frac{a(s; C) \exp \{ ik\phi(s; C) + i\alpha_{\mu} \pi/4 \}}{\left| \det \left\{ \frac{\partial^2 \phi(s; C)}{\partial s_i \partial s_j} \right\} \right|^{1/2}} \right]_{s = s^\mu(C)} \quad [4]$$

ove a è una ampiezza e α_{μ} è il simbolo della matrice $\partial^2 \phi / \partial s_i \partial s_j$.

Così Ψ appare come una sovrapposizione in cui ogni raggio μ contribuisce con un'onda la cui fase è precisamente il valore stazionario della funzione distanza ottica.

Sebbene la [4] fornisca un'utile descrizione di molti effetti di interferenza, essa ha il grave difetto di fallire proprio là dove più ci interessa la Ψ , cioè nelle caustiche. Questo risulta chiaro dalla [2], la quale implica che l'approssimazione [4] diverge all'infinito se C si muove su una caustica, a causa dell'annullarsi dei denominatori dei suoi termini. Ora, quando $k = \infty$ questa divergenza deve sicuramente aver luogo: essa esprime semplicemente la concentrazione infinita dei raggi su una caustica. Ma noi siamo interessati ad una asintotica per grandi valori di k piuttosto che al limite della traietto-

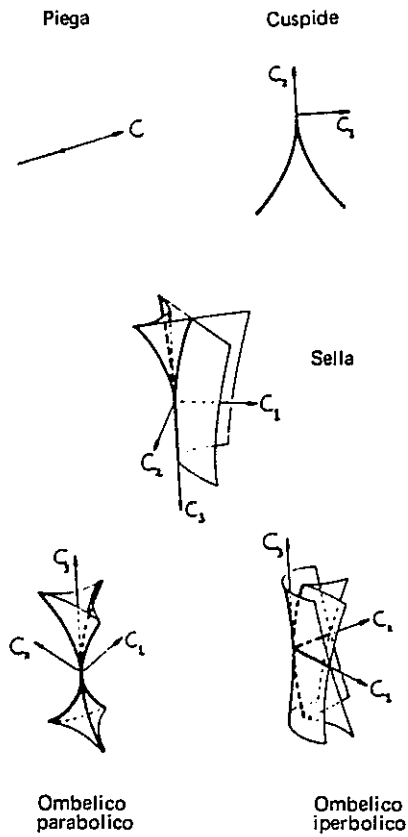


Fig. 5 - Le catastrofi elementari di codimensione $k \leq 3$

Tab. 1 - Polinomi standard Φ per le catastrofi elementari con codimensione $k \leq 4$

Nome	Simbolo	K	$\Phi(s; C)$
Piegata	A_2	1	$sa/3 + Cs$
Cuspide	A_3	2	$s^4/4 + C_2 s^2/2 + C_1 s$
Coda di rondine	A_4	3	$s^5/5 + C_3 s^3/3 + C_2 s^2/2 + C_1 s$
Ombelico ellittico	D_4	3	$s_1^2 - 3s_1 s_2^2 - C_3 (s_1^2 + s_2^2) - C_2 s_2 - C_1 s_1$
Ombelico iperbolico	D_4	3	$s_1^2 + s_2^2 - C_3 s_1 s_2 - C_2 s_2 - C_1 s_1$
Farfalla	A_5	4	$s^6/6 + C_4 s^4/4 + C_3 s^3/3 + C_2 s^2/2 + C_1 s$
Ombelico parabolico	D_5	4	$s_1^4 + s_1 s_2^2 + C_4 s_2^2 + C_3 s_1^2 + C_2 s_2 + C_1 s_1$

Tab. 2 - Esponenti che governano il passaggio di scala delle ampiezze d'onda e la spaziatura delle frange per $k \rightarrow \infty$

Catastrofe	β	σ_1	γ
Piegata	1/6	$\sigma_1 = 2/3$	2/3
Cuspide	1/4	$\sigma_1 = 3/4, \sigma_2 = 1/2$	5/4
Coda di rondine	3/10	$\sigma_1 = 4/5, \sigma_2 = 3/5, \sigma_3 = 2/5$	9/5
Ombelico ellittico	1/3	$\sigma_1 = 2/3, \sigma_2 = 2/3, \sigma_3 = 1/3$	5/3
Ombelico iperbolico	1/3	$\sigma_1 = 2/3, \sigma_2 = 2/3, \sigma_3 = 1/3$	5/3
Farfalla	1/3	$\sigma_1 = 5/6, \sigma_2 = 2/3, \sigma_3 = 1/2, \sigma_4 = 1/3$	7/3
Ombelico parabolico	3/8	$\sigma_1 = 5/8, \sigma_2 = 3/4, \sigma_3 = 1/2, \sigma_4 = 1/4$	17/8

Tab. 3 - Esponenti di scintillio e codimensione k per catastrofi di corango unitario vincenti la competizione per dominare i momenti di intensità

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
K	1	1	2	2	3	3	3 e 4	4	4	4 e 5	5	5
ν_m	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{13}{5}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{49}{6}$	$\frac{45}{6}$

Tab. 4 - Esponenti di scintillio, codimensione k e notazione simbolica per catastrofi di corango unitario o due vincenti la competizione per dominare i momenti di intensità

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Simbolo	A	A_2 e D_4	D_4	D_4 e E_6	E_6 e X	X	X	X	X e $W_{1,2}$	$W_{1,2}$	$W_{1,2}$	$W_{1,3}$
K	1	1 e 3	3	3 e 5	5 e ≥ 7	≥ 7	≥ 7	≥ 7	≥ 7 e 10	10	10	11
ν_m	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{28}{3}$	$\frac{87}{10}$	$\frac{157}{10}$

ria, e perciò cercheremo di determinare esattamente *come* la divergenza avviene quando k aumenta. Dunque la [4] vicino alle caustiche è una approssimazione troppo grossolana dell'integrale [3].

È a questo punto che interviene la teoria delle catastrofi per fornire due notevoli semplificazioni del problema per il caso importante (che si verifica « quasi sempre ») in cui la caustica ha la proprietà di *stabilità strutturale*. Questo significa che una piccola deformazione regolare di ϕ (ad esempio un diffeomorfismo quale quello che sarebbe prodotto dal cambiamento della natura o delle posizioni degli oggetti diffrangenti) causerà una deformazione regolare della caustica. Nella fig. 3, per esempio, la cuspidè rimarrà una cuspidè per piccoli cambiamenti nella forma di W . Il teorema centrale della teoria delle catastrofi (Poston e Stewart, 1978; Gilmore, 1981) afferma che *il mondo delle caustiche è diviso in classi di universalità*. Due caustiche qualsiasi della stessa classe possono essere trasformate l'una nell'altra per diffeomorfismo delle loro ϕ 's. Sono queste classi di universalità (nella terminologia matematica classi di equivalenza) che costituiscono le *catastrofi*. La classificazione delle catastrofi, cominciata da Thom (1975), è stata spinta molto più a fondo da Arnol'd (1975). La fig. 5 mostra le forme delle caustiche per le catastrofi la cui codimensione K (il numero essenziale di parametri di controllo C) soddisfa la condizione $K \leq 3$.

Il primo modo in cui questa classificazione permette una semplificazione dell'integrale di diffrazione [3] deriva dalla sostituzione di tutte le $\phi(s; C)$ in una data classe di universalità (indicata con j) con una *forma normale* $\phi_j(s; C)$. La trasformazione di ϕ in ϕ_j è ottenuta per diffeomorfismo di s e C . Da questo punto di vista la teoria delle catastrofi è la classificazione delle forme normali; la tabella I dà un elenco di forme normali per le prime, poche catastrofi (Arnol'd 1975 ne elenca molte di più). Compiendo la stessa trasformazione in [3] e sostituendo il fattore a e la trasformazione di Jacobi con l'unità (perché queste sono funzioni regolari e vicino alla caustica i valori che contribuiscono a s giacciono molto ravvicinati), otteniamo, invece del numero infinito di integrali che corrispondono a tutti i possibili ϕ , il seguente insieme finito di *catastrofi di diffrazione*:

$$\Psi_j(C; k) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{n/2} \int d^n s e^{ik\phi_j(s; C)} \quad [5]$$

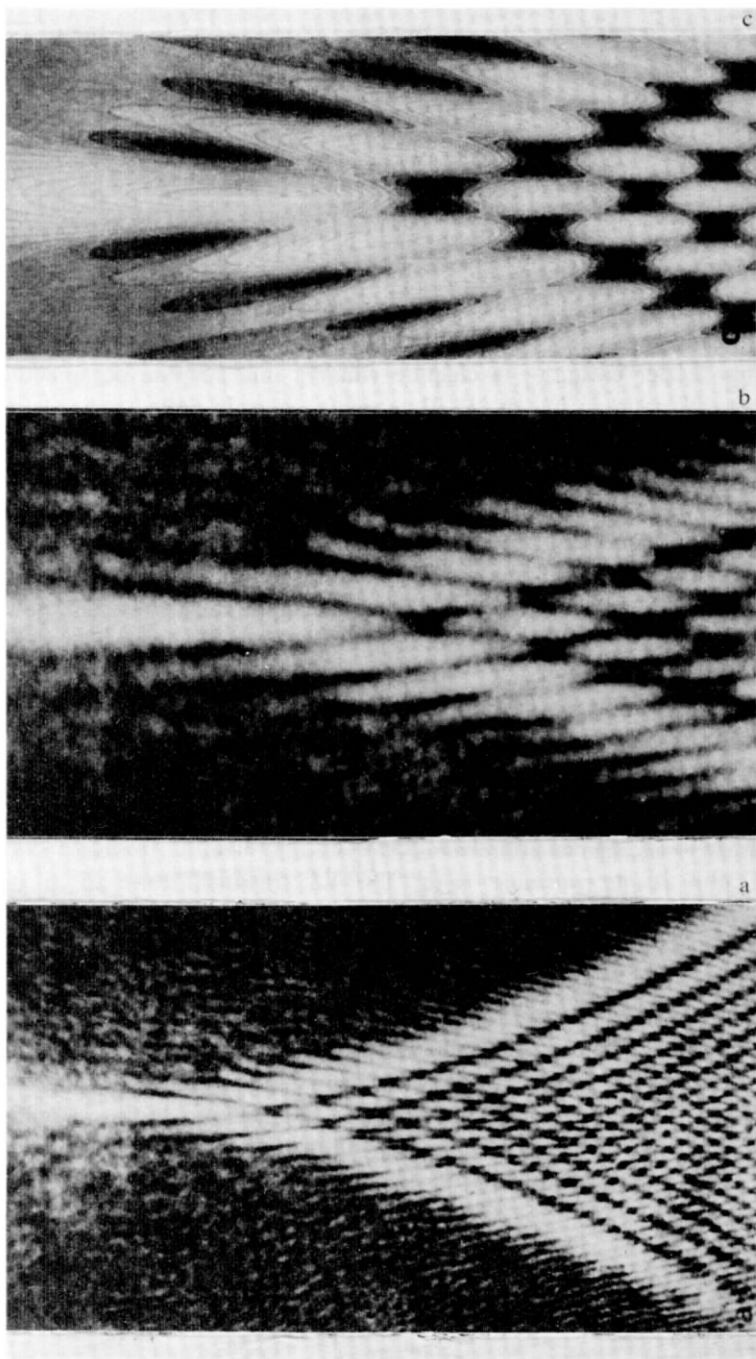


Fig. 6 - Catastrofe di diffrazione a cuspid. a) esperimento b) ingrandimento di a c) simulazione al computer ottenuta ombraggiando i contorni di $|\psi_{\text{cusp}}(C_1, C_2)|^2$ calcolati dalla [6]

Gli esponenti polinomiali negli integrandi rappresentano la complessità topologicamente irriducibile delle collisioni dei punti stazionari $s^*(C)$ di ϕ_j (cioè delle caustiche) al variare dei parametri C . Le catastrofi di diffrazione possono essere funzioni molto complicate di C . Consideriamo, ad esempio, la cuspidale. Dalla tab. 1 l'espressione polinomiale di quarto grado ϕ_{cusp} (che, usando la [1], si può facilmente vedere esser corrispondente alla molteplicità critica cubica della fig. 4) dà:

$$\Psi_{\text{cusp}}(C_1, C_2) = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp \{ ik (s^4/4 + C_2 s^2/2 + C_1 s) \} \quad [6]$$

Nella fig. 6 sono illustrate delle fotografie di un modello di intensità di $|\Psi_{\text{cusp}}|^2$ e una simulazione al calcolatore basata su di un calcolo dei contorni della [6]. Questa funzione è stata per la prima volta studiata da Pearcey, 1946. La più semplice catastrofe di diffrazione — la piega — era stata studiata da Airy, 1838. La più complicata catastrofe di diffrazione, l'ombelico ellittico, è stata studiata nei dettagli da Berry, Nye e Wright, 1979. Il calcolo degli integrali oscillatori [5] sta compendosi con la lenta operosità (vedi, per esempio, Connor e Farrelly, 1981; Connor e Curtis, 1982) a tutto il 1982.

3. Ipotesi di scala

Il secondo modo in cui la teoria delle catastrofi può semplificare gli integrali asintotici di diffrazione deriva dalla circostanza che le forme normali $\phi_j(s; C)$ sono polinomiali quasi omogenee nelle variabili s con coefficienti lineari nei parametri C . Ciò ha come conseguenza che il parametro asintotico k può essere scalato dalla [5], in modo che le catastrofi di diffrazione Ψ_j per ogni valore di k possono essere espresse in termini di Ψ_j per ogni altro valore (per esempio $k = 1$). La legge di scala esplicita è (a meno di possibili modificazioni logaritmiche che saranno menzionate più avanti):

$$\Psi_j(C_i; k) = k^{\beta_j} \Psi_j(C_i k^{\sigma_{ij}}; 1) \quad [7]$$

ove i parametri di controllo separati sono stati indicati con C_i .

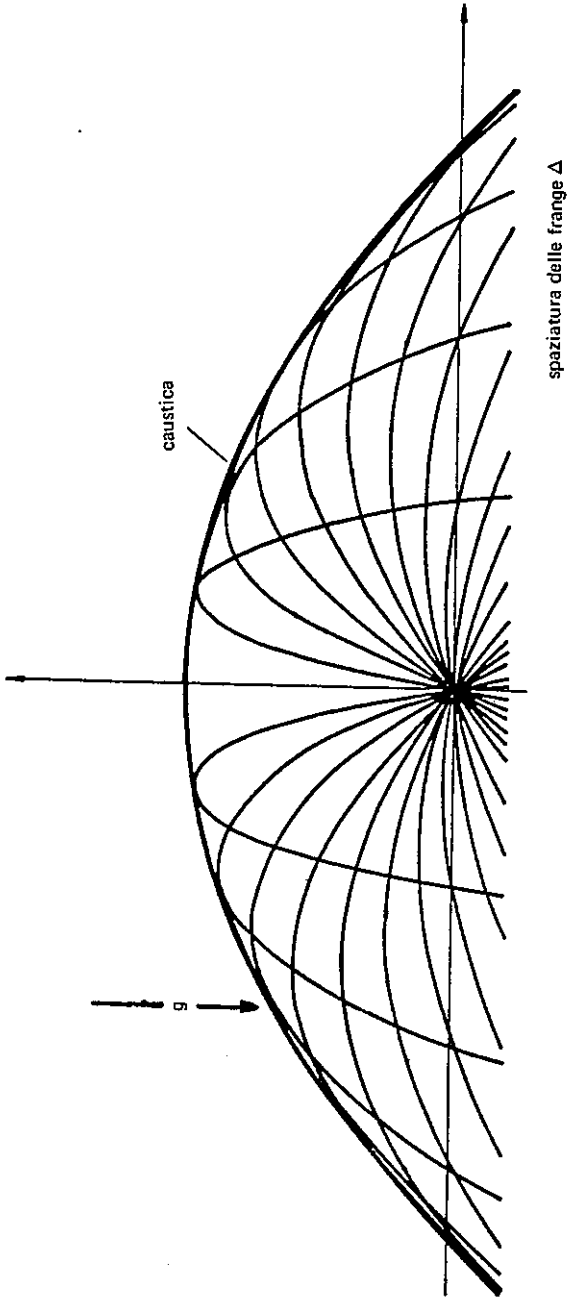


Fig. 7 - Sezione di caustica paraboloidale formata da particelle uscenti da una sorgente in campo gravitazionale uniforme

La tavola II riporta i valori degli esponenti β_j e σ_{ij} e anche l'esponente addizionale

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^k \sigma_{ij} \quad [8]$$

per catastrofi con codimensione $K \leq 4$.

Il metodo per ottenere gli esponenti consiste semplicemente nel riscaldare dapprima s per eliminare k dai termini indipendenti da C nell'esponente di [5] e quindi nel riscaldare i C_i per eliminare k dagli altri termini. È facile controllare che questa procedura applicata alla [6] fornisce gli esponenti corretti della cuspidale della tav. 2.

In termini matematici l'ipotesi di scala [7] è un'espressione precisa della non analiticità delle funzioni d'onda vicino alle caustiche per $k \rightarrow \infty$. In termini fisici l'esponente β_j descrive la divergenza dell'intensità dell'onda (nel caso di onde corte) $|\Psi_j|^2$ nella singolarità della caustica ($C_i = 0$): l'intensità scala come $k^{2\beta_j}$. Gli esponenti σ_{ij} descrivono la contrazione delle frange di diffrazione nella direzione dello spazio di controllo C_i : la spaziatura delle frange scala come $k^{-\sigma_{ij}}$. L'esponente γ_j descrive la contrazione dell'ipervolume K -dimensionale del massimo di diffrazione principale: questa scala come $k^{-\gamma_j}$. β_j è l'« indice di singolarità » introdotto da Arnol'd, 1975, e calcolato per un gran numero di casi da Varchenko, 1976; σ_{ij} e γ_j (l'« indice di frangia ») sono stati introdotti da Berry, 1977.

Per illustrare il modo in cui le leggi di scala possono rapidamente investire argomenti fisicamente interessanti, si consideri una sorgente isotropa che emette particelle *quantali* di massa m e velocità v in un campo gravitazionale con accelerazione g (fig. 7). Le corrispondenti traiettorie newtoniane involuppano una caustica che è una catastrofe a piega nella forma di un paraboloide. Entro il paraboloide attraverso ogni punto passano due raggi e la loro interferenza dà origine a frange di diffrazione nello spazio. Qual è la separazione Δ (fig. 7) semiclassica delle frange brillanti vicino alla caustica? La risposta si può ottenere tenendo presente che Δ può dipendere da m , v , g e dalla costante di Planck \hbar . Poiché \hbar corrisponde a K^{-1} nelle leggi di scala, la tab. 2 dà $\Delta \sim \hbar^{2/3}$ per la piega. Un'analisi dimensionale elementare conduce ora a

$$\Delta = a (\hbar^2/m^2g)^{1/3} \quad [9]$$

dove a è priva di dimensioni. Questa formula non contiene v e così

la spaziatura di queste frange *quantali*, sorprendentemente, non è influenzata dal cambiamento della lunghezza d'onda di De Broglie h/mv delle particelle (questo è un caso in cui il limite semiclassico non coincide con quello delle onde corte). Una analisi più raffinata (Berry, 1982a) dà per la costante il valore $a = 3.53897$, che per neutroni nella gravità terrestre dà $\Delta = 0.026$ mm — un effetto quantistico quasi — macroscopico.

Chillingworth e Romero-Fuster, 1983, hanno dimostrato una interessante relazione tra γ_j e β_j , precisamente:

$$\gamma_j = (k_j + 1)(1 - \beta_j) - 1 \quad [10]$$

ove k_j è la codimensione della j -esima catastrofe. Per le catastrofi della tab. 2 la relazione può essere controllata direttamente. Per alcune catastrofi più elevate β_j e γ_j quali sono stati calcolati da Berry, 1977, non soddisfano la [10] e questo è connesso con il fenomeno della *modalità* che dobbiamo ora brevemente discutere.

Una caratteristica notevole della primitiva classificazione di Thom delle catastrofi consisteva nella circostanza che la lista delle classi di universalità di codimensione data era finita. Se il numero delle variabili di stato s — il *corango* — è l'unità, vi è veramente solo una singolarità per ogni valore di k . Ma se il corango è due, allora un fenomeno nuovo appare quando $k = 7$: la finitezza della classificazione si spezza e le classi di universalità sono parametrizzate con uno o più *moduli* continui, indicati con a . Singolarità con a differenti non sono equivalenti rispetto al diffeomorfismo, sebbene esse possano essere topologicamente equivalenti.

Se i moduli a sono trattati come parametri di controllo addizionali e i loro indici σ_{ij} sono calcolati e inclusi nel calcolo di γ_j dalla equazione [8], allora la relazione [10] è soddisfatta. Ma questa procedura, sebbene impeccabile dal punto di vista matematico, è insoddisfacente da quello fisico, perché si trova sempre che i σ_{ij} per i moduli sono negativi o nulli, così che per $k \rightarrow \infty$ *le frange di diffrazione non si contraggono lungo direzioni modali nello spazio dei parametri*.

Un esempio è fornito dalla singolarità Z_{11} , la cui forma normale è:

$$\begin{aligned} \phi(s_1s_2; a, C_1 \dots C_9) = & s_1^3s_2 + s_2^5 + as_1s_2^4 + C_1s_1 + C_2s_1^2 + \\ & C_3s_1s_2 + C_4s_1s_2^2 + C_5s_1s_2^3 + C_6s_2 + C_7s_2^2 + C_8s_2^3 + C_9s_2^4. \end{aligned} \quad [11]$$

Eliminando k nella [5] dai primi due termini riscaldando s_1, s_2

si ottiene $\beta = 8/15$. Quindi riscaldando $C_1 \dots C_9$ per eliminare k dagli ultimi nove termini si ottiene una serie di σ_i positivi la cui somma è $\gamma = 21/5 = 63/15$, che con $k = 9$ non soddisfa la [10]). Se ora il modulo a è riscaldato, il corrispondente indice σ_a risulta $-1/15$, così che le frange di diffrazione si espandono lungo la direzione a per $k \rightarrow \infty$. Quando viene impiegato questo valore si ottiene $\gamma = 62/15$, k sale a 10 e allora la [10] è soddisfatta.

Un'altro esempio è costituito da X_9 , la cui forma normale può essere scritta così:

$$\begin{aligned} \phi(s_1, s_2; a, C_1 \dots C_7) = & s_1^4 + s_2^4 + as_1^2s_2^2 + C_1s_1 + C_2s_2 + \\ & + C_3s_1^2 + C_4s_2^2 + C_5s_1s_2 + C_6s_1s_2^2 + C_7s_1^2s_2 \end{aligned} \quad [12]$$

Riscaldando i primi due termini si ottiene $\beta = 1/2$ e riscaldando gli ultimi sette termini si ha $\gamma = 7/2$, che con $k = 7$ non soddisfa la [10]. Se ora viene riscaldato a , il suo indice è $\sigma_a = 0$, così che le frange di diffrazione non si espandono né si contraggono nella direzione a per $k \rightarrow \infty$. Naturalmente questo indice nullo non può cambiare il valore di γ , ma se a è considerato come un parametro di controllo, allora per k che sale a 8 la [10] è ancora soddisfatta.

Questi argomenti mostrano che sebbene la [10] possa essere con fiducia impiegata per porre in relazione β_j e γ_j per catastrofi non modali, non si può fare altrettanto per quelle modali se si assume che γ_j rappresenti l'indice che governa la contrazione delle frange. Questa circostanza è un indice del fatto che i moduli fisici di diffrazione a hanno un significato differente da quello dei parametri di controllo C . In alcuni casi la modalità richiede che la [7] sia modificata per mezzo di fattori logaritmici, come è stato discusso da Varchenko, 1976. Io sottolineo tuttavia che nella maggior parte delle applicazioni dell'ipotesi di scala delle onde corte le catastrofi implicate sono non modali, in modo che sia la [7] che la [10] possono essere impiegate senza preoccuparsi delle complicazioni introdotte dalla modalità.

Le leggi di scala delle catastrofi di diffrazione e gli esponenti ricordano molto quelli che sono presenti nella teoria delle transizioni di fase (Stanley, 1971; Fisher, 1967), con $k \rightarrow \infty$, corrispondente a $T \rightarrow T_c$. Anche qui si parte con integrali (per le funzioni partizione in luogo delle funzioni d'onda) la cui approssimazione quadratica conduce a un comportamento errato vicino alle singolarità (punti critici termodinamici in luogo delle caustiche). Inoltre vi sono eguaglian-

ze di esponenti analoghe alla [10] e le variabili possono essere rilevanti (analoghe ai parametri di controllo) o irrilevanti, oppure marginali (analoghe ai moduli).

Ma vi sono delle differenze tra i due generi di ipotesi di scala. Gli esponenti di diffrazione sono sempre numeri razionali, mentre gli esponenti termodinamici non necessariamente lo sono. Gli integrali di diffrazione possono essere ridotti a integrali di dimensioni inferiori e il passaggio di scala può essere compiuto in un numero finito di passi, mentre le funzioni partizione implicano dimensioni infinite ed è la loro trasformazione ricorsiva tramite il gruppo di ri-normalizzazione (Wilson, 1975; si veda anche Pfeuty e Toulouse, 1977) che genera le leggi di scala.

4. Scintillio di onde corte casuali

Quando viene rifratta dalle turbolenze atmosferiche la luce stazionaria proveniente da una stella acquista un'intensità fluttuante che noi percepiamo come uno scintillio. Quando è riflessa o rifratta dalle onde irregolari su una superficie d'acqua la luce del sole forma fantastiche immagini di linee luminose in movimento sulle fiancate delle barche, sotto i ponti e sul fondo delle piscine. A causa della imprevedibilità delle turbolenze atmosferiche e delle onde nell'acqua si può parlare della intensità della luce fluttuante come di una funzione aleatoria e si può tentare di comprenderne il comportamento statistico. La lunghezza d'onda della luce è piccola in confronto alle più piccole celle di turbolenza atmosferica o alle più piccole increspature dell'acqua, e perciò questi problemi appartengono al dominio delle *onde corte casuali*.

Il problema della propagazione di onde in mezzi casuali ha dato origine a un'ampia pubblicistica (passata in rassegna da Uscinski, 1977 e in un contesto più generale da Ziman, 1979) e lo stesso è accaduto per la riflessione delle onde su superfici irregolari (Beckmann e Spizzichino, 1963; Bass e Funks, 1979). Malgrado gli intensi studi non è ancora stata raggiunta una soluzione analitica di questi problemi. Questo è il caso persino del semplice *modello di schermo di fase* (Mercier, 1962; Bramley e Young, 1967; Salpeter, 1967) in cui una modulazione di fase spaziale casuale viene impartita ai fronti d'onda di un'onda inizialmente piana che si propaga liberamente: le fluttuazioni di fase sono convertite tramite diffrazione in fluttuazioni di intensità, che diventano l'oggetto di studio. Fino a poco tempo fa

l'unico caso trattabile era quello della diffusione debole, che poteva essere affrontato con tecniche di perturbazione quali l'approssimazione di Born.

Ora tuttavia sta emergendo una chiara immagine del limite delle onde corte, cioè il limite per $k \rightarrow \infty$, basata sulla comprensione del fatto che le onde casuali devono essere dominate da *caustiche casuali*, vicino alle quali le funzioni d'onda $\Psi(C; k)$ assumono la forma di una delle catastrofi di diffrazione discusse nei paragrafi 2 e 3. Le caustiche originano *intense fluttuazioni non gaussiane* nell'intensità $|\Psi|^2$. Nel raggio limite $k = \infty$ le caustiche sono singolarità di Ψ (non attenuate dalla diffrazione) e le fluttuazioni di intensità sono infinitamente forti. È importante comprendere che queste *fluttuazioni forti dominate da singolarità* sono prodotte da una focalizzazione naturale dei raggi che avviene quando le fluttuazioni nell'indice di rifrazione atmosferica o nell'altezza della superficie dell'acqua sono di per se stesse moderate (o anche distribuite secondo una gaussiana).

Le grandi fluttuazioni sono descritte dai *momenti* I_m della distribuzione di probabilità dell'intensità dell'onda definiti da

$$I_m \equiv \langle |\Psi|^{2m} \rangle, \quad [13]$$

ove $\langle \rangle$ indica la media su un insieme di mezzi casuali o superfici ondulanti. I_1 è l'intensità media dell'onda e non è grande per $k \rightarrow \infty$ perché le singolarità delle caustiche sono integrabili. $I_m \geq 2$ diverge per $k \rightarrow \infty$, comportamento opposto a quello di un'onda casuale gaussiana ($\text{Re}\Psi$ e $I_m\Psi$ sono variabili casuali indipendenti con valor medio nullo), per cui $I_m = m!$, indipendente da k . Le fluttuazioni non gaussiane nello scintillio della luce di Sirio sono state misurate da Jakeman, Pike e Pusey (1976). In studi del secondo momento senza l'impiego della teoria delle catastrofi Shishov (1971) e Buckley (1971) hanno stabilito che $I_2 \sim \lg k$ per $k \rightarrow \infty$. In quanto segue delineerò la principale asintotica- k di I_m per m qualsiasi; un trattamento più completo è contenuto nel lavoro originale di Berry (1977) e in un suo importante sviluppo fatto da Hannay (1982; 1983).

Quello che la teoria delle catastrofi consente è la comprensione della natura della divergenza di I_m per $k \rightarrow \infty$. Un passo cruciale sta nel capire che l'insieme (ad esempio quello delle superfici irregolari) su cui viene fatta la media in [13] può essere *parametrizzato regolarmente* con un gran numero di variabili che possono essere considerate dei parametri *extra* di controllo C . Ogni scelta di C dà così una atmosfera o una superficie irregolare. Per esempio, la devia-

zione di una superficie irregolare rispetto a un piano o la variazione dell'indice di rifrazione dell'aria possono essere descritte da funzioni aleatorie gaussiane che sono sovrapposizioni di un numero infinito di sinusoidi le cui fasi sono i parametri di controllo *extra* (che danno uno spazio di controllo che ha la forma di un toro dimensionalmente infinito). La media consiste nell'integrazione su questi C con qualche densità di probabilità regolare P(C) delle realizzazioni dei membri dell'insieme, così che:

$$I_m = \int dC P(C) |\Psi(C; k)|^{2m}. \quad [14]$$

Ora, per grandi valori di k questo spazio di controllo enormemente aumentato è retto da caustiche su cui Ψ è grande; a causa del grande numero di dimensioni di C possono avvenire catastrofi di codimensione molto elevata. L'integrale [14] è retto dalle caustiche, ed è naturale valutare i contributi separati di ogni classe di universalità delle singolarità, il che equivale a scoprire la dipendenza di k del contributo I_{mj} della j-esima catastrofe all'm-esimo momento. L'ipotesi che qui vien fatta è che i contributi alla [14] di differenti catastrofi possono essere separati.

Per stimare I_{mj} le leggi di scala delle catastrofi di diffrazione sono impiegate nel modo seguente. Le regioni localizzate dello spazio di controllo di alta intensità corrispondenti alla j-esima catastrofe danno contributi la cui « forza » è $|\Psi|^{2m} \sim k^{2m\beta_j}$ e la cui « estensione » è $k^{-\gamma_j}$ ove β_j e γ_j sono gli esponenti del paragrafo 3. Così:

$$I_{mj} \propto k^{2m\beta_j - \gamma_j} \quad [15]$$

Allo stesso risultato si giunge scalando accuratamente l'integrale [14].

Così ogni catastrofe contribuisce con una divergenza che segue una legge esponenziale al momento n-esimo, a patto che l'esponente $2m\beta_j - \gamma_j$ sia positivo. Ovviamente I_m è retto dalla catastrofe (s) per cui questo esponente è il più grande, così che il comportamento asintotico è:

$$I_m \rightarrow A_m k^{\nu_m} \quad \text{per } k \rightarrow \infty, \quad [16]$$

ove

$$\nu_m \equiv \max_j (2m\beta_j - \gamma_j) \quad [17]$$

sarà chiamato *l'esponente di scintillio*.

Nella lotta per comandare I_m quale catastrofe vince? Questa questione è ampiamente discussa da Berry (1977). Il risultato principale è che la codimensione $k(m)$ della catastrofe vincente cresce con m : momenti più elevati sono retti da catastrofi più elevate. Questo è ragionevole dal punto di vista fisico, perché altri momenti di $|\Psi|^2$ sono retti da fluttuazioni molto rare al rivelatore di luce, e ciò corrisponde al passaggio stretto di catastrofi di diffrazione a grande codimensione.

Il valore dell'esponente di scintillio ν_m dipende da quali catastrofi possono entrare in competizione, e questo a sua volta dipende da circostanze fisiche. Per onde che si propagano in uno spazio a due dimensioni i fronti d'onda sono monodimensionali e così possono competere solo catastrofi di corango unitario (cioè con una variabile di stato s - cfr. paragrafo 2). Queste sono le singolarità cuspidi, e la [17] dà per gli esponenti di scintillio:

$$\nu_m = \max_K [K(2m - K - 3)] / [2(K + 2)] \quad [18]$$

I primi (pochi) esponenti sono elencati nella tab. 3. Il valore $\nu_2 = 0$ riflette il fatto già citato che I_2 cresce come $\lg k$ piuttosto che come una potenza. Per $n \rightarrow \infty$, $\nu_m \rightarrow m$ e la codimensione $K_{\max}(m)$ della catastrofe dominante cresce come $K_{\max}(m) \rightarrow 2\sqrt{m}$. Per onde in spazi a tre dimensioni i fronti d'onda sono bidimensionali e così possono competere catastrofi con corango unità oppure due. La difficoltà ora consiste nella circostanza che molte singolarità a corango due manifestano modalità (discusse alla fine del paragrafo 3) e la classificazione delle catastrofi modali è incompleta. Tuttavia uno studio delle singolarità completamente classificate con $k \leq 11$ mostra che per un dato m la quantità $2m\beta_j - \gamma_j$ cresce con k e quindi decresce, così che vi è ancora una (o qualche volta due) catastrofe dominante. Gli esponenti di scintillio che si ottengono e la catastrofe dominante (s) sono elencati nella tab. 4. È chiaro che le singolarità a corango due dominano presto quelle di corango unitario.

Un problema interessante per la propagazione delle onde in uno spazio a tre dimensioni che non è ancora stato risolto è il seguente: come si comportano i ν_m per $m \rightarrow \infty$. La risposta richiederebbe la conoscenza dell'asintotica di β_j e γ_j per $k \rightarrow \infty$.

Per corango uno e due l'esistenza di un massimo in $2m\beta_j - \gamma_j$ per k finito, da cui dipende l'intero concetto della singolarità dominante, porta a una piacevole sorpresa. Non è affatto chiaro se questo com-

portamento continuerebbe a persistere per singolarità con corango ≥ 3 , cioè per propagazione di onde in spazi ad elevato numero di dimensioni. Forse vi è un numero di dimensioni critico al di sopra del quale $2m\beta_j - \gamma_j$ non hanno un massimo. Il progresso nella soluzione di questo problema è ostacolato dalla mancanza di una classificazione sistematica delle catastrofi a alto corango.

Il risultato centrale [16] di questa teoria è che i momenti di intensità divergono per $k \rightarrow \infty$ con gli esponenti di scintillio ν_m che sono universali per una data classe di catastrofi in competizione. Questa universalità significa che ν_m sono indipendenti dalla statistica del mezzo casuale o della superficie ondulante. Ma i coefficienti A_m nella [16] non sono universali e dipendono dal tipo di casualità. Hannay (1982, 1983) con una potente analisi ha calcolato gli A_m per le catastrofi a corango unitario implicate nella diffrazione ad opera di uno schermo di fase casuale a una dimensione. Egli ha trovato che per certi momenti eccezionali I_m (ove $16m - 7$ è il quadrato di un numero dispari, ad esempio $m = 2, 3, 5, 5, 8, \dots$), cioè quelli ai quali la catastrofe dominante cambia (vedi tab. 3), la divergenza secondo la legge esponenziale è moltiplicata per un fattore $\lg k$. Per il caso particolare in cui lo schermo di fase ha una statistica gaussiana e $m = 2$, Hannay ha trovato risultati in accordo con i precedenti calcoli di Shishov (1971) e Buckley (1971).

Un problema abbastanza differente — di natura non statistica — per cui gli A_m possono essere calcolati esplicitamente, sorge negli stati stazionari quantici limite di sistemi integrabili classicamente (Berry, Hannay e Ozorio de Almeida, 1983). Gli stati quantici sono associati con traiettorie classiche che per questi sistemi riempiono dei tori nello spazio delle fasi. La funzione d'onda delle coordinate $\Psi(q)$ sale a grandi valori sulle caustiche, che sono le singolarità delle proiezioni dei tori dallo spazio delle fasi allo spazio delle coordinate (q) . Per valori piccoli della costante di Planck \hbar , l'importanza di queste caustiche è evidenziata dal comportamento dei momenti di densità di probabilità I_m , la cui definizione e la cui asintotica, analoga alla [13] e alla [16] è

$$I_m \equiv \iint dq |\Psi(q; \hbar)|^{2m} \rightarrow A_m / \hbar^{\nu_m} \text{ as } \hbar \rightarrow 0 \quad [19]$$

Per problemi con uno e due gradi di libertà i valori universali di ν_m e le formule per A_m in termini di geometria toroidale sono ottenute per le singolarità della piega, della cuspidè e dell'ombelico

iperbolico (singolarità che sono le sole generiche in questi casi) (le divergenze [19] sono in contrasto con le asintotiche non divergenti dei momenti degli stati quantici associati con le traiettorie aleatorie classicamente che non sono confinate in tori ma riempiono regioni dello spazio delle fasi con maggior numero di dimensioni).

In ottica gli esponenti di scintillio previsti dalla [16] possono essere messi alla prova tramite la misurazione dei momenti usando luce di differenti lunghezze d'onda, perché

$$\nu_m = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(\ln I_m)}{d(\ln k)} \quad [20]$$

Una simile prova è stata compiuta da Walker, Berry e Upstill, 1983, proprio con due lunghezze d'onda di luce laser rifratta da acqua increspata casualmente. L'esperimento era molto difficile perché gli alti momenti dipendono da eventi rari e così occorre molto tempo per stabilire i loro valori. La fig. 8 mostra gli esponenti misurati confrontati con le previsioni date da varie classi di catastrofi. Il miglior accordo è dato dalla cuspidè con γ_j calcolati usando solo una delle direzioni di controllo (attraverso la cuspidè), ed è coerente con l'osservazione visiva che durante gli esperimenti il piano rilevatore era dominato da linee ove esso era quasi toccato dalle punte a cuspidè delle superfici caustiche dello spazio. Questo problema di una « asintotica parziale » per casi in cui le caustiche sono deformate così asimmetricamente (per esempio allungate) che non tutti i parametri di controllo contribuiscono ai γ_j implicati nella scalatura dei momenti di intensità è assai complesso e richiede ulteriori studi.

Alla fine di questo paragrafo desidero sottolineare che vi è una importante classe di problemi che implicano onde e casualità per i quali l'asintotica delle onde corte non è caratterizzata da fluttuazioni forti dominate da singolarità. Questo avviene quando la casualità ha una semi-similarità, per esempio una struttura frattale (Mandelbrot, 1982) che si estende a scale di lunghezza infinitesima. Allora il limite $k \rightarrow \infty$ giunge sempre a scale più fini e la casualità non appare mai regolare su una scala di lunghezza d'onda. Le caustiche non si formano e invece ci si aspetta e si trova effettivamente che la statistica dell'onda per $k \rightarrow \infty$ dipende da una dimensione D-frattale che descrive la semi-similarità della casualità.

Due di tali casi sono stati studiati a fondo: entrambi riguardano il modello a schermo di fase per onde che si propagano in uno spazio a due dimensioni. Un simile schermo di fase è caratterizzato dalla de-

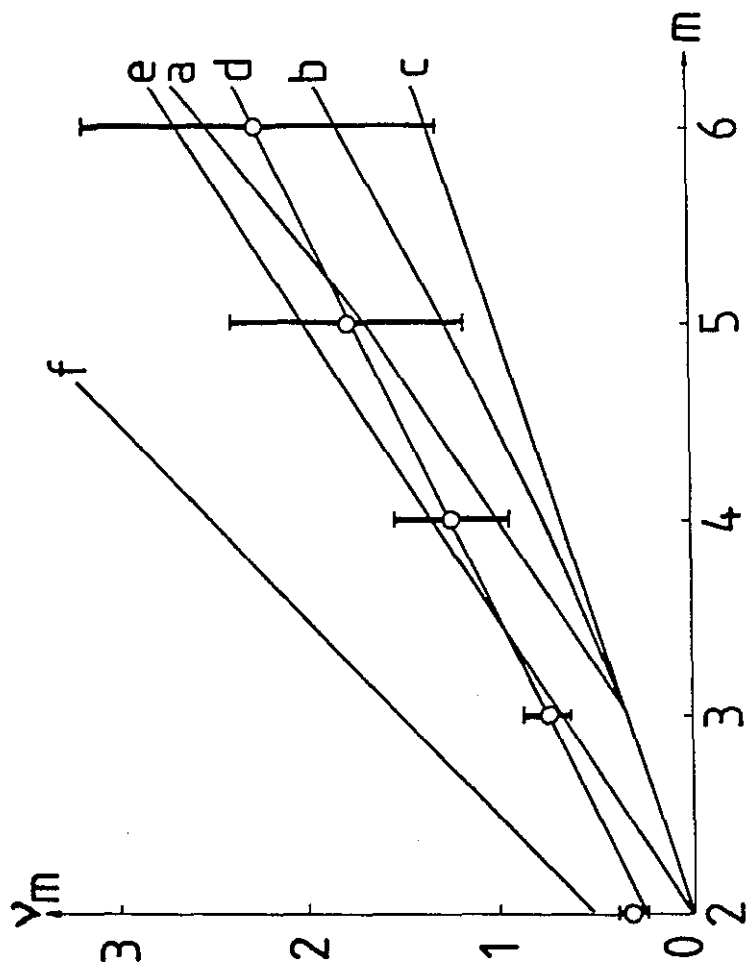


Fig. 8 - Esponenti di scintillio (secondo Walker, Berry e Upstill 1983). Circoli e segmenti d'errore: sperimentali; curva a: competizione non limitata tra catastrofi di corango uno e due (tab. 4); curva b: competizione limitata a catastrofi di corango unitario (cuspidi) (tav. 3); curva c: esponenti delle catastrofi a piega; curva d: esponenti da sezioni trasversali non generiche di catastrofi cuspidi; curva e: esponenti da sezioni trasversali non generiche di catastrofi a ombelico ellittico e iperbolico; curva f: esponenti da sezioni trasversali non generiche di catastrofi X_4 .

viazione $h(x)$ che esso produce in fronti d'onda inizialmente rettilinei perpendicolari al raggio incidente. Nel primo caso (« diffrattali »), Berry 1979 e Blackwell (1981) hanno studiato la propagazione di onde monocromatiche e impulsi quasi monocromatici quando il fronte di onda, e quindi anche il grafo della funzione $h(x)$, è una curva *frattale* a D dimensioni (per esempio una delle funzioni di Wierstrass-Mandelbrot studiate da Berry e Lewis, 1980); simili curve sono continue ma non differenziabili, così che i raggi (normali) non esistono e a *fortiori* non esistono caustiche. Nel secondo caso (« *subfrattali* »), Jakeman (1982 ab) ha studiato onde monocromatiche che evolvono da fronti d'onda per cui $h(x)$ è regolare ma la sua derivata dh/dx è una curva *D-frattale*, in questo modo esistono raggi ma non caustiche (perché la curvatura non esiste).

5. Code di probabilità per singolarità delta-generate

Consideriamo la trasformata di Fourier delle catastrofi di diffrazione [5] pesata da $(2\pi k)^{-D/2}$, vale a dire:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_j(C; t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\Psi_j(C; k)}{(2\pi k)^{D/2}} e^{-ikt} = \\ &= \int d^n s \delta \{t - \phi_j(s; C)\} \end{aligned} \quad [21]$$

In quanto funzioni di t per C fissati, questi integrali sono vincolati dalla funzione delta a dipendere solo dalla curva di livello $\phi_j = t$ nello spazio di stato a n dimensioni. Ai valori t per i quali ϕ_j è stazionario (cfr. [1]) $\tilde{\Psi}_j(C; t)$ ha singolarità. Berry, 1982b, spiega come integrali del tipo [21] con una funzione regolare generale $\phi(s; C)$ che rimpiazza le forme normali ϕ_j (cfr. [3]), si presentano in una molteplicità di contesti in fisica, nei quali le singolarità possono corrispondere a vortici e a punti di stagnazione nel flusso di un fluido stazionario, fronti d'onda di impulsi che si propagano, punti fissi di fluido hamiltoniano, o le singolarità spettrali di Van Hove.

Quando i parametri C variano attraverso il gruppo di catastrofi ove vale la [2] (così come la [11]), in modo che ϕ_j sia stazionaria (nello spazio s) a un ordine più elevato, allora le singolarità di $\tilde{\Psi}_j$ si fondono e diventano di ordine più elevato. Considerati globalmente nel-

lo spazio t , C_i i luoghi che soddisfano $\phi_j = t$ e anche la [1] sono chiamati *singolarità di Legendre* (vedi Arnol'd, 1975, 1976, 1978 e Sewell, 1977, 1978).

La natura delle singolarità in $\tilde{\Psi}_j$, che con le forme normali ϕ_j avvengono per $t = 0$, può essere chiarita sostituendo la variabile di integrazione k in [21] con $k' \equiv k|t|$ e usando la legge di scala [7] per le catastrofi di diffrazione. Questa procedura dà:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_j(C_i; t) &= \int \frac{dk'}{|t|} \frac{|t|^{n/2}}{(2\pi k')^{n/2}} \Psi_j(C_i; k'/|t|) e^{-ik' \text{sgnt}} \\ &= \int \frac{dk'}{(2\pi k')^{n/2}} |t|^{n/2-1-\beta_j} \Psi_j(C_i |t|^{-\sigma_{ij}}; k') e^{-ik' \text{sgnt}} \quad [22] \\ &= |t|^{-(\beta_j+1-n/2)} \tilde{\Psi}_j(C_i |t|^{-\sigma_{ij}}; \text{sgnt}) \end{aligned}$$

ove $\text{sgnt} = t/|t|$. Così la k -scalatura di $\tilde{\Psi}_j$ è trasformata in una t -scalatura di $\tilde{\Psi}_j$.

È chiaro che la divergenza secondo la legge esponenziale quando t varia attraverso $t = 0$ fino al punto più singolare $C_i = 0$ dello spazio di controllo diventa più forte al crescere dell'indice di singolarità β_j , cioè per catastrofi di più alte codimensioni. Il caso $\beta_j = 0$ corrisponde a un punto di ϕ stazionario non degenerato (quadratico) non catastrofico al valore $t = \phi$. Per $n = 1$ questo là una radice quadrata della divergenza di $\tilde{\Psi}$. Per $n = 2$ non vi è divergenza secondo la legge esponenziale e la singolarità di $\tilde{\Psi}$ è o una discontinuità a gradino (se ϕ ha un massimo o un minimo) o una divergenza logaritmica (se ϕ ha una sella). Per $n > 2$ non vi è una divergenza secondo la legge esponenziale in un punto stazionario di ϕ_j a meno che il suo grado di degenerazione è tanto grande quanto $\beta_j > n/2 - 1$; tutti i β_j che soddisfano a questa condizione corrispondono a catastrofi modali.

Varchenko (1982) ha preso in considerazione integrali del tipo [21] in un quadro matematico molto generale in cui le singolarità sono poste in relazione con aspetti topologici profondi delle forme normali. Dangelmayr (1982) ha considerato integrali del tipo [21]

nel contesto della propagazione delle onde dispersive nel quale il parametro t può intervenire in modo non lineare e ha valutato gli integrali canonici in [22], cioè $\tilde{\Psi}_j(C_i; \pm 1)$ per alcune classi di singolarità.

La legge di scala [22] è l'analogia, per le singolarità delta-generate di [21], della legge di scala [7] per le catastrofi di diffrazione [5], e la discussione sino a qui ha rispecchiato quella del paragrafo 3. Ora dobbiamo ripercorrere la discussione fatta nel paragrafo 4 e considerare la statistica di $\tilde{\Psi}(C; t)$ quando la casualità è introdotta sostituendo ϕ_j con $\phi(s; C)$, che denota un insieme (con C quali parametri) di funzioni di $s_1 \dots s_n$. È conveniente studiare non il momento di $\tilde{\Psi}$ ma la sua distribuzione di probabilità $\pi(\tilde{\Psi})$ definita come

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{\Psi}) &\equiv \langle \delta(\tilde{\Psi} - \int d^n s \delta(t - \phi(s; C)) \rangle \\ &= \int dC P(C) \delta(\tilde{\Psi} - \int d^n s \delta(t - \phi(s; C)) \end{aligned} \quad [23]$$

(cfr. [13] e [14]), ove $P(C)$ è la densità delle realizzazioni dell'insieme. La dipendenza da t sarà priva di importanza.

Per C fissato, $\tilde{\Psi}$ può possedere divergenze per particolari t . Se C è fatta variare attraverso catastrofi, le singolarità in $\tilde{\Psi}$ sono più forti. Così $\tilde{\Psi}$ ha *fluttuazioni forti* dominate da singolarità, che determinano la forma della coda di $\pi(\tilde{\Psi})$ per grandi $\tilde{\Psi}$.

Il primo passo per calcolare la coda di $\pi(\tilde{\Psi})$ per grandi $\tilde{\Psi}$ consiste nel trovare i contributi delle differenti singolarità j nello spazio C alla media dell'insieme [23]. Come per l'analogo calcolo dei momenti nel paragrafo 4, si procede scalando usando la [22], con lo scopo di ricavare l'esplicita dipendenza da $\tilde{\Psi}$ degli integrali. Nel calcolo (le cui particolarità tecniche sono spiegate da Berry (1982b), la sola avvertenza da tener presente è la necessità di aumentare ogni forma normale di catastrofe ϕ_j con una costante additiva che apporta un parametro di controllo *extra* da includere nella integrazione di C in [23]. Il risultato è che la j -esima catastrofe contribuisce con $\pi_j(\tilde{\Psi})$ alla coda di probabilità, ove

$$\pi_j(\tilde{\Psi}) \propto \tilde{\Psi}^{-\{1 + (\gamma_j + 1)/(\beta_j + 1 - n/2)\}} \quad [24]$$

che è l'analogia della [15]; compaiono ancora gli esponenti di catastrofe di diffrazione B_j e γ_j del paragrafo 3, ma in una combinazione nuova.

Così ogni singolarità contribuisce con una certa coda che ha una legge esponenziale, ed è chiaro che $\pi(\tilde{\Psi})$ è dominata dalla catastrofe (s) per la quale l'esponente di decadimento è il più piccolo. Quindi

$$\pi(\tilde{\Psi}) \rightarrow \frac{B}{\tilde{\Psi}^{1+\mu}} \text{ per } \Psi \rightarrow \infty \quad [25]$$

dove

$$\mu = \min_j \frac{\gamma_j + 1}{\beta_j + 1 - n/2} \quad [26]$$

Vi è ancora una competizione tra catastrofi, ma il risultato dipende ora fortemente dalla dimensionalità n della delta-integrazione in [21], così come dalle singolarità che possono entrare in competizione. Dettagli completi sono dati in Berry (1982); qui enuncio solo i risultati ottenuti.

Per $n = 2$ la competizione non limitata per il più piccolo μ tra catastrofi con corango uno e due è vinta dalle singolarità ombelico ellittico/iperboliche con $\mu = 8$. Così:

$$\pi(\tilde{\Psi}) \rightarrow B/\tilde{\Psi}^8 \quad (n = 2, \text{ non limitata}) \quad [27]$$

è la legge di decadimento universale per questo caso. Se per qualche ragione fisica la competizione è limitata alle catastrofi di corango unitario (cuspidi), il vincitore è la cuspidale con $\mu = 9$ e si ha una legge di decadimento:

$$\pi(\tilde{\Psi}) \rightarrow B/\tilde{\Psi}^{10} \quad [28]$$

È necessaria una difficile analisi per stabilire che i coefficienti B in queste due formule sono finiti.

Per $n = 1$ la competizione comprende solo cuspidi, ed è vinta non

da una catastrofe qualsiasi, ma da generici punti stazionari di ϕ per i quali $\beta_j = \gamma_j = 0$. Così $\mu = 2$ e:

$$\pi(\tilde{\Psi}) \rightarrow B/\tilde{\Psi}^3 \quad (n = 1). \quad [29]$$

Per $n = 3$ il denominatore in [26] è $\beta_j^{-1/2}$, così che possono competere solo catastrofi con $\beta_j > 1/2$; questo esclude tutte le catastrofi di corango unitario e tutti gli ombelichi, lasciando solo alcune catastrofi modali di corango due e tre. La difficoltà consiste qui nel fatto che la classificazione di queste ultime non è sufficientemente estesa da raggiungere la catastrofe per cui μ è il più piccolo (ammesso che questa esista). Tutto quel che può esser detto sulla base della esistente classificazione è che

$$\pi(\tilde{\Psi}) \geq B/\tilde{\Psi}^{48} \quad \text{per } \tilde{\Psi} \rightarrow \infty. \quad [30]$$

È chiaro che l'asintotica completa per grande $\tilde{\Psi}$ della distribuzione di probabilità $\pi(\tilde{\Psi})$ definita dalla [23] deve essere immensamente complicata. Le leggi di decadimento [27]-[30] danno solo i termini principali di quella che è come minimo una doppia serie di potenze: ogni catastrofe j (non soltanto le vincitrici della competizione) dà una serie di termini del tipo [24] più delle correzioni. È probabile che dalle interazioni tra questi termini più elevati scaturiscano molti tipi di correzioni logaritmiche. Questo potrà essere l'affascinante oggetto di ulteriori studi.

6. Dominanza di singolarità non catastrofiche: odori in venti casuali

Per concludere descriverò un esempio istruttivo in cui la statistica asintotica di fluttuazioni forti può essere calcolata da una legge di scala che descrive singolarità che non sono catastrofi. L'esempio deriva dallo studio del problema di come i maschi delle falene usano il senso dell'odorato per trovare la via che porta alle femmine. Le femmine possono essere considerate come sorgenti puntiformi di feromone (che ha proprietà di attrazione sessuale), in modo che il problema diventa un problema di *diffusione*. La diffusione da sola, tuttavia, non può spiegare il fatto che i maschi avvertono l'odore a

centinaia di metri di distanza perché, come mostra un calcolo elementare, ci vorrebbero secoli perché il feromone si diffondesse a simili distanze. Infatti le femmine emettono feromone solo quando vi è vento, e dunque la diffusione è aiutata dalla *convezione*.

Discuterò la natura del volo dell'odore della femmina rappresentandolo con un campo di concentrazione $C(\underline{r}, t)$ nel punto \underline{r} al tempo t prodotto da una sorgente posta nell'origine degli assi che emette con continuità, con un vento avente un campo di velocità $\underline{V}(\underline{r}, t)$ che rappresenta un fluido incomprimibile, in modo che $\nabla \cdot \underline{V} = 0$. Il maschio può sentire il campo scalare C (per mezzo delle sue antenne) e il campo vettoriale \underline{V} (confrontando il vento che sente con il terreno che vede - Marsh, Kennely e Ludlow, 1978), ed una questione molto interessante, che però qui non sarà presa in considerazione, è come questa informazione determina la sua strategia di volo. Io mi concentrerò invece sul problema del modo in cui le fluttuazioni turbolente del vento $\underline{V}(\underline{r}, t)$ producono *fluttuazioni* forti nel volo dell'odore $C(\underline{r}, t)$.

Nei primi studi non è stata pienamente riconosciuta l'importanza di queste fluttuazioni di concentrazione forti ed è stata dedicata molta attenzione alla concentrazione media $\langle C(\underline{r}) \rangle$ sull'insieme dei campi turbolenti \underline{V} . Ora, tuttavia, è stato riconosciuto che la navigazione delle falene è probabilmente influenzata fortemente dalle fluttuazioni di concentrazione e queste sono state anche misurate (Murlis e Jones, 1981).

La concentrazione di particelle con costante di diffusione D e influenzate dalla convezione è governata dall'equazione:

$$D \nabla^2 C(\underline{r}, t) = \frac{\partial C}{\partial t}(\underline{r}, t) + \underline{V}(\underline{r}, t) \cdot \nabla C(\underline{r}, t), \quad [31]$$

ove il secondo membro è la derivata convettiva. Nella teoria della turbolenza questa equazione è stata oggetto di intensi studi (per una rassegna si veda Moffatt, 1981). Qui desidero esplorarne un aspetto cui pare non sia stata prestata molta attenzione, cioè a dire l'asintotica per valori piccoli di D delle fluttuazioni, ove la convezione

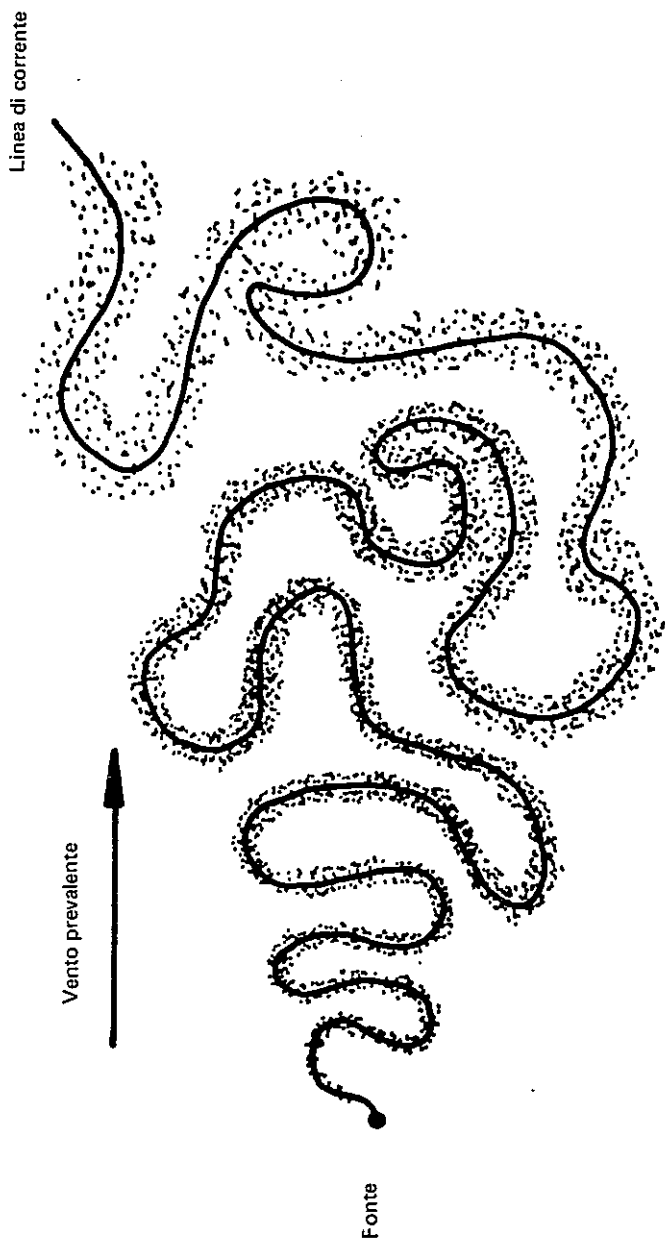


Fig. 9 - Schizzo della piuma d'odore a valle di una falena femmina che emette feromone in un vento turbolento.

è di gran lunga più efficiente della diffusione come meccanismo per il trasporto del feromone.

Un'idea di come potrebbe essere l'asintotica per D piccoli si ottiene considerando che la [31] può essere considerata una equazione di Schroedinger dipendente dal tempo ottenuta quantizzando l'hamiltoniana classica $H(\underline{r}, \underline{p}, t)$ definita come:

$$H(\underline{r}, \underline{p}, t) = \underline{p}^2 + \underline{V}(\underline{r}, t) \cdot \underline{p} \quad [32]$$

sostituendo al « momento » \underline{p} l'operatore

$$\underline{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad [33]$$

l'equazione di Schroedinger, cioè

$$H(\underline{r} - i\hbar \nabla) C(\underline{r}, t) = i\hbar \frac{\partial C}{\partial t}(\underline{r}, t) \quad [34]$$

riproduce la [31] se si fa l'identificazione

$$i\hbar = D \quad [35]$$

(non è necessaria la simmetrizzazione del termine $\underline{p} \cdot \underline{V}$ in H perché $\nabla \cdot \underline{V} = 0$).

Comprendendo che l'hamiltoniana (32) può essere riscritta come:

$$H = (\underline{p} + \underline{V}/2(\underline{r}, t))^2 - |\underline{V}(\underline{r}, t)|^2/4 \quad [36]$$

e che le condizioni ai limiti per la [31] corrispondono a una sorgente puntiforme che emette con continuità, si arriva alla seguente interpretazione del campo di concentrazione: $C(\underline{r}, t)$ è la funzione di Green a energia zero per una particella *quantale* in un campo magnetico B e un campo elettrico E , dati da:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{1}{2} \nabla \times \underline{V} \\ E &= \frac{1}{2} \left(\underline{V} \cdot \nabla \underline{V} + \underline{V} \times (\nabla \times \underline{V}) + \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad [37]$$

con costante di Planck immaginaria.

Così il limite per D piccoli diviene il limite semiclassico $\hbar \rightarrow \infty$, che è lo stesso del limite delle onde corte studiato nei paragrafi 2-4. Questo risultato suggerisce che le fluttuazioni di concentrazione sono dominate da caustiche delle traiettorie (« raggi dell'odore ») generate dalla hamiltoniana [32] con statistiche che divergono per $D \rightarrow \infty$ con gli esponenti di scintillio del paragrafo 4. Ma l'analogia è falsa! Le fluttuazioni di concentrazione non sono dominate da caustiche.

Per vedere perché questo avviene consideriamo l'espressione semiclassica basilare [4], che dà le funzioni d'onda lontano dalle caustiche. Nel problema di diffusione e convezione, $i\hbar$ deve essere sostituito con $i/\hbar = -1/D$ e ϕ con l'azione classica generata dalla hamiltoniana [32]. Questa azione è l'integrale temporale della lagrangiana $L(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ lungo traiettorie hamiltoniane, e così il « fattore di fase », contributo di una traiettoria $\underline{r}(\tau)$ che parte dalla fonte a t_0 e arriva a \underline{r} all'istante t , è:

$$\exp \left\{ - \frac{1}{D} \int_{t_0}^t L(\underline{r}(\tau), \dot{\underline{r}}(\tau), \tau) d\tau \right\}. \quad [38]$$

Poiché la sorgente è stazionaria, t_0 è determinato dalla condizione che l'esponente sia stazionario rispetto a t_0 , cosa che implica che le traiettorie, che escono continuamente dalla sorgente, facciano ciò con hamiltoniana nulla, cioè:

$$H(\underline{r}(t_0); \underline{p}(t_0), t_0) = 0. \quad [39]$$

Nel nostro problema la lagrangiana in [38] non può mai essere negativa. Questo deriva dalle equazioni di Hamilton per la traiettoria, cioè:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{r}} &= 2\underline{p} + \underline{V}(\underline{r}, t) \\ \dot{\underline{p}} &= \underline{p} \times \underline{\nabla} V(\underline{r}, t) + \underline{p} \times \underline{\nabla} \times \underline{V}(\underline{r}, t) \end{aligned} \right\}, \quad [40]$$

la prima di queste implica che:

$$L = \underline{p} \cdot \underline{r} - H = \frac{1}{4} [\underline{r} - \underline{V}(\underline{r}, t)]^2. \quad [41]$$

Così al limite per D piccolo la [38] prevede piccole concentrazioni esponenzialmente, a meno che \tilde{r}, t sia raggiunto con traiettorie lungo cui la lagrangiana è sempre zero, cosa che garantisce che l'azione è zero. L'annullarsi di L implica che $\dot{\tilde{r}} = V$, così che le traiettorie a azione nulla sono i *cammini delle particelle di fluido*. Questi sono infatti soluzioni delle equazioni di Hamilton [40] (corrispondenti a $p = 0$). Ne concludiamo che per $D \rightarrow 0$, $C(\tilde{r}, t)$ si annulla ovunque eccetto che sulla *linea di corrente*, che consiste di tutte le particelle di fluido che per qualche tempo $t_0 < t$ sono trasportate per convezione dalla sorgente. Questa è una espressione del fatto ovvio dal punto di vista fisico che quando non vi è diffusione le particelle di feromone possono essere trasportate solo per convezione.

La linea di corrente è la singolarità che domina le fluttuazioni della concentrazione. Se $R(t, t_0)$ è la posizione al tempo t della particella di fluido trasportata per convezione fuori dalla sorgente a t_0 (ottenuta integrando $\dot{R} = V$) la linea di corrente $\mathcal{L}(t)$ è l'unione di R fino a t a partire da t_0 , cioè

$$\mathcal{L}(t) = \bigcup_{t_0 < t} R(t, t_0). \quad [42]$$

Il limite convettivo del campo di concentrazione, che soddisfa la [31] per una sorgente che emette N particelle di feromone al secondo, è:

$$C(\tilde{r}, t) = N \int_{(D=0)}^t dt_0 \delta(\tilde{r} - R(t, t_0)). \quad [43]$$

Se D non è nullo, le particelle di feromone diffonderanno lontano dalla $\mathcal{L}(t)$, e la [43] sarà sostituita da una espressione esponenziale della forma [38] in cui la concentrazione in un punto \tilde{r} vicino a $\mathcal{L}(t)$ è determinata dall'azione lungo la traiettoria hamiltoniana sino a \tilde{r} ; questa traiettoria non è naturalmente il cammino di una particella di fluido. Non scriverò l'espressione generale, limitandomi a dare quella relativa al caso speciale in cui V è un vento uniforme costan-

te lungo la direzione x . Allora C è indipendente dal tempo ed è dato esattamente da:

$$C(r) = (N/4\pi D r) \exp \{ V/2D (x - r) \} \quad [44]$$

ove $r = |x|$. Questo in verità decade lontano dalla linea di corrente, che è semplicemente la semi-linea a valle $x > 0$, $y = z = 0$. Lontano dalla valle e per D piccolo $C(r)$ può essere approssimato dalla espressione gaussiana:

$$C(r) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{N}{4\pi D x} \exp \left\{ - \frac{V(y^2 + z^2)}{4Dx} \right\}. \quad [45]$$

Questo esempio, e anche una analisi asintotica generale, conduce alla seguente rappresentazione filamentosa (fig. 9) del percorso dell'odore per D piccolo. Sulla linea di corrente C cresce a grandi valori, dell'ordine di D^{-1} . Lontano da $\mathcal{L}(t)$, C ha una distribuzione gaussiana in variabili perpendicolari a \mathcal{L} , con una larghezza dell'ordine di \sqrt{D} e crescente a valle. Una caratteristica che non risulta evidente dall'esempio [45] è che nel caso generale i filamenti sono altamente anisotropi a causa dei gradienti di velocità del vento su \mathcal{L} . L'anisotropia (della distribuzione gaussiana di C trasversalmente a \mathcal{L}) cresce in modo tipico esponenzialmente a valle e spiega per esempio perché il fumo di sigaretta nascente si sviluppa rapidamente in una superficie convoluta piuttosto che secondo una linea convoluta.

Rimane da spiegare l'irrelevanza delle caustiche della famiglia di traiettorie che soddisfano le equazioni di Hamilton [40] sotto il vincolo della condizione di energia zero [39]. Le caustiche certamente esistono e le divergenze che esse apporterebbero alle ampiezze moltiplicando i fattori [8] (cfr. la discussione seguente il paragrafo 4) sono ammorbidite in « catastrofi d'olfatto » analoghe alle catastrofi di diffrazione canoniche [5] con $-1/D$ al posto di ik . Queste divergenze ammorbidite obbediscono alle leggi di scala esponenziali discusse nel paragrafo 3. Ma per $D \rightarrow 0$ tutto il comportamento di tali leggi esponenziali è sommerso dal decadimento esponenziale globale per traiettorie che non sono vicine alla linea di corrente. Questo fatto ovvio può essere illustrato con esempi espliciti (che spero di pubblicare altrove) per i quali le equazioni di convezione e di diffusione

e delle traiettorie possono essere risolte con esattezza (vi possono essere interessanti scambi di dominanza esponenziale nell'insieme di Maxwell (Poston e Stewart, 1978) vicino alle caustiche, ma questo avviene tra contributi che sono insignificanti per D piccolo).

Una caustica sarebbe significativa se cadesse sulla particolare traiettoria che genera la linea di corrente, perché allora non ci sarebbe una attenuazione esponenziale. Questo non può però avvenire genericamente perché richiederebbe che vi fossero posizioni r su Ω intersecate da più di un raggio, con più di una \dot{r} , ma \dot{r} è determinata unicamente come $\dot{V}(r, t)$ su Ω . Il solo modo in cui la forza della funzione delta su Ω in [43] può essere infinita è che $|\partial R/\partial t_0|$ si annulli, e ciò richiede che un punto di stagnazione $\dot{V} = 0$ sia trasportato per convezione attraverso la sorgente, cosa che rappresenta un evento non generico (sebbene non sia difficile costruire esempi speciali in cui ciò avviene).

In questo problema, tuttavia, le catastrofi sono insignificanti; la linea di corrente domina il campo di concentrazione, e le asintotiche per $D \rightarrow \infty$ sono completamente differenti dalle asintotiche dominate dalle caustiche $h \rightarrow 0$ o $k \rightarrow 0$. Questo riflette il fatto che le soluzioni di [3] hanno singolarità essenziali all'origine del piano D e si comportano in modo molto differente se $D = 0$ è avvicinato lungo l'asse reale (convezione e diffusione) o quello immaginario (meccanica quantistica). Fisicamente il problema delle onde analogo riguarda sorgenti stazionarie in mezzi dispersivi con correnti; un esempio è offerto dalla caustica a forma di V che domina le onde dietro una nave in movimento (Lamb, 1932; Synge, 1963); qui la linea di corrente non è importante.

Ogniqualevolta la falena maschio vola vicino alla linea di corrente incontra intense raffiche di feromone. La statistica di queste fluttuazioni forti è incarnata nei *momenti di concentrazione*:

$$C_m \equiv \langle C^m \rangle \quad [46]$$

Queste quantità sono le analoghe dei momenti di intensità (13), e siamo parimenti interessati a come esse scalano con il parametro asintotico, in questo caso D .

Per questo abbiamo bisogno di sapere con quali proprietà scala-
no i filamenti, proprietà discusse seguendo [45] perché

$$C_m \sim (\text{concentrazione sulla linea di corrente})^m \times$$

probabilità di un filamento di essere entro l'ampiezza della gaussiana.

Il primo fattore scala come D^{-m} , mentre il secondo è proporziona-
le all'area della sezione trasversale di un filamento, che è il quadrato
dell'ampiezza della gaussiana, dunque scala come D . Così:

$$C_m \rightarrow \frac{E_m}{D^{m-1}} \text{ per } D \rightarrow 0 \quad [48]$$

Per $m = 1$ non vi è divergenza, cosa che riflette il fatto che la ve-
locità dell'emissione di feromone, e dunque la concentrazione media
 C_1 , è indipendente da D . Per $m > 1$ i momenti divergono per $D \rightarrow 0$,
e ciò è l'effetto della singolarità della linea di corrente. Si noti che
gli esponenti $m - 1$ sono abbastanza differenti dagli esponenti ν_m
di scintillio dominato da catastrofi (equazioni [16] e [17]) per i
momenti di intensità. La correttezza della [48] può essere confermata
(con qualche difficoltà) dalla esatta soluzione della [31] per alcuni sem-
plici modelli; in questi casi è possibile valutare le costanti E_m .

Il feromone solitamente consiste in una miscela contenente mole-
cole di differente diffusività. Le corrispondenti fluttuazioni saranno
differenti, secondo la [48] (questo è l'analogo dell'effetto di luce
policroma nello scintillio), in modi che devono dipendere dalla di-
stanza della sorgente. Se la falena può distinguere differenti sostanze
nel feromone (l'analogo nell'olfatto della visione dei colori), può es-
sere capace di impiegare queste differenze di fluttuazione nella sua na-
vigazione per trovare la femmina.

Bibliografia

- G.B. Airy, *Trans. Camb. Phil. Soc.*, (1938), 379-403.
V.I. Arnol'd, *Usp. Mat. Nauk.*, 30, 5 (1975), 3-65.
V.I. Arnol'd, *Commun Pure App. Math.*, 29 (1976), 557-582 (errata 30 (1977)
823).
V.I. Arnol'd *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New
York, 1978.
F.G. Bass, I.M. Fuks, *Wave Scattering by Statistically Rough Surfaces*, (Perga-
mon, Oxford, 1979.

- P. Beckmann, A. Spizzichino, *Tre scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*, Pergamon, Oxford, 1963.
- M.V. Berry, *Adv. in Phys.*, (1976), 1-26.
- M.V. Berry, *J. Phys. A.*, 10 (1977), 2061-2081.
- M.V. Berry, *J. Phys. A.*, 12 (1979), 781-797.
- M.V. Berry, *Singularities in Waves and Rays*, in *Physics of Defects* (Les Houches Lectures XXXIV ed. R. Balian, M. Kleman, J-P. Poirier), North-Holland, Amsterdam 1981, pp. 453-543.
- M.V. Berry, *J. Phys. A*, 15 (1982 a), L385-L388.
- M.V. Berry, *J. Phys. A*, 15 (1982b), 2735-2749.
- M.V. Berry, T.M. Blackwell, *J. Phys. A*, 14 (1981), 3101-3110.
- M.V. Berry, J.H. Hannay, A.M. Ozorio de Almeida, *Physica D*, 1983, (in corso di stampa).
- M.V. Berry, Z.V. Lewis, *Proc. Roy. Soc.*, A. 370 (1983), 459-484.
- M.V. Berry, J.F. Nye, F.J. Wright, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, A. 291 (1978), 453-484.
- M.V. Berry, C. Upstill, *Prog opt.*, 18 (1980), 257-346.
- E.N. Bramley, M. Young, *Proc. Lee*, 114 (1967), 555-556.
- R. Buckley, Aust, *J. Phys.*, 24 (1971), 351-71, 373-96.
- D. Chillingworth, C. Romero-Fuster, *Proc. Roy. Soc. Edin.*, 94A, (1983), 339-350.
- J.N.L. Connor, Curtis P.R., *J. Phys.*, A 15 (1982), 1179-1190.
- J.N.L. Connor, D. Farrelly, *J. Chem. Phys.*, 75 (1981), 2831-2846.
- G. Dangelmarly, *J. Phys.*, A 15 (1982), L337-342.
- P.A.M. Dirac, *Can. J. Phys.*, 3 (1951), 1-23.
- J.J. Duistermaat, *Commun. Pure. App. Maths*, 27 (1974), 207-281.
- M.E. Fisher, *Reps. Prog. Phys.*, 30 (1967), 615-730.
- R. Gilmore, *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, Wiley, New York, 1981.
- J.H. Hannay, *Optica Acta*, 29 (1982), 1631-1649.
- J.H. Hannay, *J. Phys.*, A 16 (1983), L61-L66.
- E., Jakeman *J. Phys.*, A 15 (1982 a), L55-L59.
- E. Jakeman, *J. Opt. Soc. Amer.*, (1982 b), 1034-1041.
- E. Jakeman, E.R. Pike, P.N. Pusey, *Nature*, 263 (1976), 215-217.
- G. Jona-Lasinio, *Nuovo. Cim.*, B26 (1975), 99-119.
- Yu.A., Kravtsov, *Sov. Phys. Acoust.*, 14 (1968), 1-17.
- Sir Horace Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Mass., 1982.
- V.P. Maslov, M.V. Fedoriuk, *Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics*, D. Reidel, Dordrecht, 1981.
- B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco, 1982.
- D. Marsh, J.S. Kennedy, A.R. Ludlow, *Physiological Entomology*, 3 (1978), 221-240.
- R.P. Mercier, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58 (1962), 382-400.
- H.K. Moffatt, *J. Fluid Mech.*, 106 (1981), 27-47.
- J. Murlis, C.D. Jones, *Physiological Entomology*, 6 (1981), 71-86.
- T. Pearcey, *Phil. Mag.*, 37 (1946), 311-317.
- P. Pfeuty, G. Toulouse, *Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena*, Wiley, New York, 1977.

- T. Poston, I.N. Stewart, *Catastrophe Theory and its Applications*, Pitman, London, 1978.
- E.E. Salpeter, *Astrophys. J.*, 147 (1967), 433-448.
- L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, Wiley-Interscience, New York, 1981.
- M.J. Sewell, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 82 (1977), 147-163.
- M.J. Sewell, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 83 (1978), 273-288.
- V.I. Shishov, *Izv. Vuz. Radiofiz. (Ussr)*, 14, 85-92.
- H.E. Stanley, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, London, 1971.
- I.N. Stewart, *Physica 2D* (1981), 245-305.
- H.J. Sussmann, *Synthese*, 31 (1975), 229-270.
- J.L. Synge, *Proc. Roy. Irish Acad.*, 65 (1963), A, 1-34.
- R. Thom, *Structural Stability and Morphogenesis*, Benjamin, Reading, Mass., 1975.
- C. Upstill, F.J. Wright, J.V. Hajnat, R.H. Templer, *Optica Acta*, 29 (1982), 1651-1676.
- B.J. Uscinski, *The Elements of Wave Propagation in Random Media*, McGraw-Hill, New York, 1977.
- A.N. Varchenko, *Funkt. Anal. i Prilozhen (Moscow)*, 10 (1976), 3, 13-38.
- A.N. Varchenko, *Math. Ussr Izvestija*, 18 (1982), 469-511.
- J.G. Walker, M.V. Berry, C. Upstill, *Optica. Acta*, 30 (1983), 1001-1010.
- K.G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.*, 47 (1975), 773-840.
- R.S. Zahler, H.J. Sussmann, *Nature*, 269 (1977), 759-763.
- J.M. Ziman, *Models of Disorder*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Mass., 1978.