

Colours of Caustics: Catastrophes in raindrops and bathroom windows

M.V. Berry and S. Klein

H.H.Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Tyndall Avenue,
Bristol BS8 1TL, United Kingdom

1. Introduction

Perhaps you do not know what an optical caustic is or you simply cannot remember, but you are surrounded by them. You see them every day of your life. It starts in the morning. Have a look into your cup of milky coffee and you will see the image of a small overhead light focused into two bright curves kissing at a point. If it is raining you may see another caustic, the rainbow. Do you like swimming? The light patterns at the bottom of the swimming pool are caustics as well. Let us now dive into the science of optical caustics.

A caustic can be defined as the envelope of a family of rays, that is the boundary between regions in space illuminated by different numbers of rays (figure 1). Across a caustic, both the light intensity and the number of rays change discontinuously. Light is focused on a caustic. Because energy travels along rays, the light intensity is largest at caustics. Therefore caustics are bright places dominating optical images. They are the singularities of geometrical optics. The study of caustics was rescued from obscurity by the discovery in the 1960s and 1970s that they can be classified mathematically by catastrophe theory of René Thom and Vladimir Arnold.

On closer examination of optical caustics, the wave nature of light is revealed again. The hard edges of geometrical optics are resolved into interference fringes (in the following we use interference and diffraction as equivalent terms). When generated by white light, these fringes are coloured, and it is our aim to understand the colours so well as to reproduce them on a computer screen, and thereby compare theory and experiment directly. This proved surprisingly difficult. Nowadays, a computer with a colour monitor is on every physicist's desk, and we

all use colour to make our pictures more attractive, or to represent other variables (e.g. contours of temperature in a plot of air flow). But it is not easy to use a colour monitor to give a true representation of colour itself. Some of the techniques are "well known to those who know well", but hard to find in the literature, so here we will give an outline of how we accomplished the rendering of these diffraction colours.

2. Catastrophe theory of caustics

According to Thom and Arnold, the mathematical heart of catastrophe theory is the classification of singularities of gradient maps. These singularities are sudden changes, as parameters vary, in the pattern of stationary points (maxima, minima, saddles) of smooth functions. The dramatic name arises because the theory applies to catastrophes in the usual sense, for example the sudden collapse of a bridge (whose state is a minimum of the elastic energy function) as the weight on it (a parameter) is increased smoothly. In optics, catastrophe theory applies because of Fermat's principle: the travel time of light from source to image is stationary.

The mathematics provides a list of those forms of caustics that are structurally stable; these are the shapes that change smoothly when the conditions that give rise to them are changed. For example, the isolated point focus of a lens is unstable in this sense, because the smallest imperfection causes the point to be destroyed and replaced by a complicated pattern of aberrations. The list consists of the elementary catastrophes (figure 2). It is organized by codimension, that is the number of dimensions that must be explored to find the singularity. The simplest case is the fold catastrophe, with codimension one, which can be a point on a line, a line in a plane, or a surface in space (figure 2). The codimension two singularity is the cusp, that is a point in the plane where fold curves meet as shown in figure 2, or a line where two fold surfaces meet. An isolated focal point in the plane, or an isolated focal line in space, would also have codimension two but are not on the list because they are structurally unstable. The emphasis of stability means that catastrophe optics can be regarded as a description of natural focusing.

Some of these elementary catastrophes can easily be seen in simple optical experiments. Those who wear glasses will agree that they can be very inconvenient during rain. The whole world is distorted and it can become almost impossible to ride a bike or even to read a street sign. But on the other hand it is a very easy method to see caustics. Raindrops form little lenses and since spectacles are usually a little bit dirty the droplet lenses are irregular. Looking through them at point sources, for example street lights in the distance at night, reveals many examples of the stable singularities in two dimensions (e.g. the plane of an image), namely fold lines and cusp points (fig.3, and see [2]).

In the laboratory the same effect can be achieved by using a pane of bathroom-window glass instead of rained-on spectacles. It should have a non-periodic pattern in order to see a wide variety of caustics. We used randomly corrugated "Atlantic", a product of the British company Pilkington, with irregularities whose typical linear dimensions are 1mm. To get nice photographs of caustics, you can use the arrangement of fig.4. The light passing through the pinhole P2 should be accurately parallel otherwise multiple pictures of the same caustics are seen. In this way we observed [4] the colours of the fold (figure 5) and cusp (figure 6).

3. Colours of Caustics

The best known source of colour is refractive dispersion; this can colour caustics even in the absence of diffraction. An example already mentioned would be the geometrical-optics rainbow. We ignore such refraction colours (they are negligible in our experiments anyway, because deflection angles are very small), and concentrate on the vividly coloured fringes, generated from white light by diffraction near caustics. In the raindrop experiment these interference colours are hard to see with the unaided eye: the fringes near caustics seem black and white, which contradicts physical common sense. This is an illusion, caused by the inability of the eye to resolve differences of colour on the fine angular scales of these observations, in circumstances where it is nevertheless possible to resolve differences of intensity (for more about this, see [3]).

For a white light source, the intensity spectrum $I(R, \lambda)$ of the diffracted light at each wavelength λ and field point $R = \{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ is simply the squared modulus of the wavefunction $\psi(R, \lambda)$ for a source of unit strength, multiplied by the spectral distribution $S(\lambda)$ of the source:

$$I(R, \lambda) = S(\lambda) |\psi(R, \lambda)|^2 \quad (1)$$

Mathematically, each type of monochromatic caustic has its characteristic 'diffraction catastrophe' pattern. The fold diffraction catastrophe function is an Airy function, and the cusp is a Pearcey function. Fig.7 shows the corresponding intensity profiles. With white light these patterns are coloured because the interference maxima for the different wavelength occur at different places. Apart from a dependence on the spectrum of the white light, the colours are universal, that is characteristic only of the geometrical singularity. Universality is a consequence of a beautiful property of the wavefunction $\psi(R, \lambda)$ that describes the decoration of a given geometrical singularity. The property is wavelength scaling:

$$\psi(R, \lambda) = \frac{C}{\lambda^\beta} \Psi\left(\left\{\frac{x_i}{\lambda^{\sigma_i}}\right\}\right) \quad (2)$$

where Ψ is the diffraction catastrophe function appropriate to the catastrophe being considered. The 'critical exponent' β describes how the light intensity diverges in the geometrical limit $\lambda \rightarrow 0$, and the exponents σ_i describe the diminishing scales of the fringes as $\lambda \rightarrow 0$.

The theoretical prediction of the colour at each field point [3,4] requires the calculation of tristimulus values; these define the amount of three primary colours which, when additively mixed, match the colour under test for the standard observer. In the system of the Commission International d'Eclairage (CIE), the tristimulus values $U_i(R)$ are

$$U_i(R) = \int_0^\infty d\lambda I(R, \lambda) u_i(\lambda) \quad (3)$$

where the $u_i(\lambda)$ are related to the three types of colour detecting cone cells in the human retina. Calculation of the coloured fold and cusp diffraction catastrophes were made via equations (1-3) using the program Mathematica™. The colours were rendered on a display (monitor or printer) by transforming the CIE tristimulus values to RGB (red-green-blue) coordinates appropriate to the display, and then compensating for the nonlinearity of the display.

Figure.8 shows the colours of the fold, calculated in this way, and figure.9 those of the cusp. We do not expect perfect agreement with observation (figures 5 and 6), one reason being that the spectrum of the source was not modelled precisely, and the human eye is a sensitive detector of colour discrepancies. However, it is clear that the main features of the colours observed are captured by theory.

Our study of coloured caustics produced three interesting outcomes. First is the explanation of the unexpectedly large number of fringes that can be seen. A naive estimate, based on the destruction of fringe contrast by the overlapping of different colours and incorporating the fact that the visible spectrum includes wavelengths varying by a factor of two ($\Delta\lambda/\lambda \approx 1/2$), suggests that only about two fringes should be visible in white light. However, the three separate cone functions $u_i(\lambda)$ are much narrower than this - moreover, as figure 10 illustrates, the intensity contrast in the fringes decays faster than the colour contrast, so that colours persist deep into the interference region (see [4] for more about this).

Second, figure 11 shows a surprising feature of coloured cusps: the fine lines parallel to their symmetry axis. Strangely, they cannot be found in cusps produced by monochromatic light; therefore they must be artefacts of the superposition of different colours. They can be explained by partial decoherence. Each point inside the cusp is reached by three rays, whose interference in monochromatic light gives the pattern of maxima and minima in fig.7b . If two of the rays r_1 and r_2 have a very small phase difference, but differ greatly in phase from the third ray r_3 , then the fringes associated with the interference of r_1 and r_2 will be preserved and their interference with r_3 will be destroyed. Precisely this partial decoherence occurs inside the cusp near the axis.

Third, observe that in Fig.11 not only is the principal maximum at each cusp point white but the maxima far along the fold lines emanating from the cusp are uncoloured too; the first few maxima on the fold are coloured. To explain these facts, we note first that at the cusp itself all three rays are in phase and so the principal maximum is white. On the fold lines, two of the three rays are always in phase, so their contribution is uncoloured wherever the third ray is negligible, and this is the case far from the cusp. Only for the first few maxima along the fold is the third ray bright enough to generate colours through its phase difference with the other two.

We hope we have shown that that scientific understanding of natural phenomena does not destroy beauty, but creates it, that familiar phenomena have still their secrets and that collaboration of theory and experiment leads to unexpected results.

Acknowledgement We would like to thank Dr. Gregor Tanner and Dr. Jens Marklof for many helpful suggestions.

References

1. René Thom: Structural stability and morphogenesis
Benjamin , New York French 1972;
English trans. by D.H.Fowler, 1975
2. M. V. Berry and C. Upstill: Catastrophe Optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns, *Progress in Optics* **18** (1980) pp 257-346
3. M.V.Berry, A.N.Wilson: Black and White fringes and the Colors of Caustics. *Applied Optics* **33** (1994) pp 4714 - 4718
4. M. V.Berry. S.Klein: Colored diffraction catastrophes
Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93** (1996) pp 2614 - 2619

Figure captions

figure 1. Cusped caustic as envelope of family of rays; this could be produced, for example, by light reflected inside a coffee-cup.

figure 2. The elementary catastrophes with codimension ≤ 3 .

figure 3. Far-field caustic from an irregular water-droplet 'lens'

figure 4. Apparatus for observing bathroom-window caustics. White light from a source passes through a pinhole P1, through a lens L, and finally through a second pinhole which selects a region of about 1mm^2 of the glass pane G. The light passing through G forms a caustic surface whose far field (beginning about 10mm beyond G) expands with distance, the typical angular size being 15° . The light then falls directly onto the film plane of the camera C. Magnification of details is achieved by shifting the camera away from the glass pane.

figure 5. Colours decorating the fold diffraction catastrophe, observed with the apparatus of figure 4.

figure 6. Colours decorating the cusp diffraction catastrophe, observed with the apparatus of figure 4.

figure 7. Density plots of the theoretical intensities in monochromatic light of (a) the fold, (b) the cusp diffraction catastrophes.

figure 8. Theoretical colours of the fold diffraction catastrophe.

figure 9. Theoretical colours of the cusp diffraction catastrophe.

figure 10. (a) colours across a fold; (b) intensity of the colours. Note that the intensity contrast decays faster than the colour contrast.

figure 11. Three cusps from a bathroom window. The fine lines emanating from the cusps and crossing in the middle of the picture are artefacts of partial decoherence.

Die Farben von Kaustiken

Katastrophen in Regentropfen und Strukturglas

M. V. Berry und S. Klein

Vielleicht wissen Sie nicht, was optische Kaustiken sind oder Sie können sich einfach nicht daran erinnern, aber Sie sind von ihnen umgeben. Sie sehen sie jeden Tag Ihres Lebens. Es fängt schon morgens an. Schauen Sie doch einmal in Ihre Tasse Milchkaffee: Das Licht einer kleinen Deckenlampe oder der Sonne wird in zwei helle Kurven fokussiert, die sich in einem Punkt aneinanderschmiegen. Bei Regen können Sie eine andere Kaustik beobachten: den Regenbogen. Gehen Sie gerne schwimmen? Die Lichtmuster am Boden eines Schwimmbeckens sind ebenfalls Kaustiken. Lassen Sie uns nun in die Wissenschaft der optischen Kaustik eintauchen.

1. Einleitung

Eine Kaustik kann als die Einhüllende einer Familie von Strahlen definiert werden, d. h. als die Grenze zwischen Raumgebieten mit unterschiedlicher Strahldichte (vgl. Abb. 1). Die Lichtintensität und die Strahlzahl ändern sich quer zu einer Kaustik diskontinuierlich. Licht wird in eine Kaustik fokussiert und hat daher dort ein Intensitätsmaximum. Deshalb erscheinen Kaustiken in optischen Abbildungen als dominierende, helle Strukturen. Sie sind die Singularitäten der geometrischen Optik. In den 60ern und 70ern Jahren bewahrte die Entdeckung, daß Kaustiken durch die damals brandneue Katastrophentheorie von René Thom und Vladimir Arnold mathematisch klassifiziert werden können, ihre Untersuchung vor einem obskuren Schicksal.

Betrachtet man optische Kaustiken genauer, so zeigt sich auch hier die Wellennatur des Lichtes. Die harten Kanten der geometrischen Optik lösen sich in Interferenzstreifen auf. (Im folgenden werden Interferenz und Beugung als äquivalente Begriffe benutzt.) Verwendet man Weißlicht, so sind diese

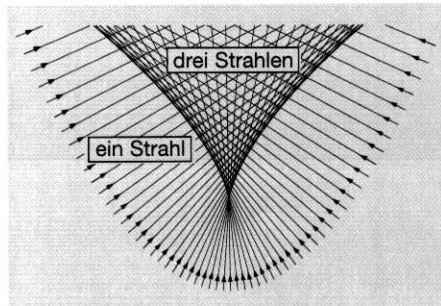


Abb. 1: Spitze als Einhüllende einer Familie von Strahlen; erzeugt z. B. durch Lichtreflexion in einer Kaffeetasse.

Streifen farbig. Es ist unser Ziel, diese Farben so gut zu verstehen, daß wir sie auf einem Computerbildschirm reproduzieren und dabei Theorie und Experiment direkt vergleichen können. Das hat sich als überraschend schwierig erwiesen. Heutzutage gehört ein Computer zur Standardausrüstung eines Physikers. Wir alle benutzen Farbe, um unsere Abbildungen interessanter oder verständlicher zu machen. Es ist aber nicht einfach, Farbe auf einem Bildschirm

oder im Druck wirklichkeitsgetreu zu reproduzieren. Den Eingeweichten sind dafür Methoden bekannt, aber sie sind nur schwer in der Literatur zu finden. Wir skizzieren daher, wie wir die wirklichkeitsgetreue Wiedergabe von Beugungsfarben erreicht haben.

2. Die Katastrophentheorie der Kaustiken

Das mathematische Herz der Katastrophentheorie nach Thom und Arnold ist die Klassifizierung von Singularitäten hinreichend oft differenzierbarer Abbildungen. Bei variierenden Parametern sind diese Singularitäten plötzliche Änderungen im Muster stationärer Punkte (Maxima, Minima, Sattelpunkte) von unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Der dramatische Name kommt daher, daß die Theorie auf Katastrophen im landläufigen Sinn angewandt werden kann: z. B. auf den plötzlichen Einsturz einer Brücke (deren Zustand das Minimum der elastischen Energie ist), wenn das Gewicht (ein Parameter) auf ihr langsam zunimmt. In

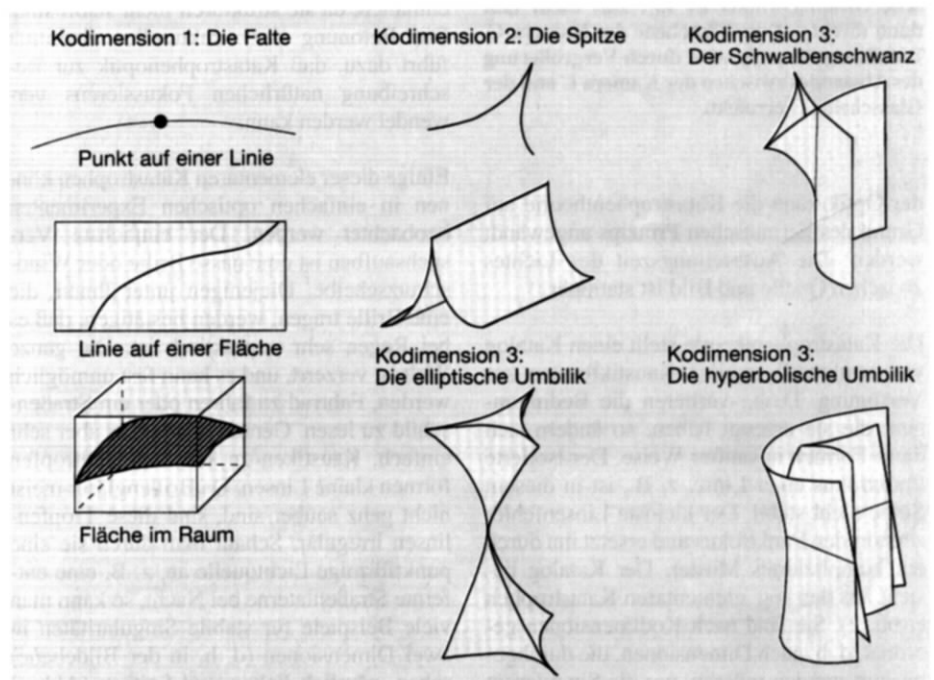


Abb. 2: Die elementaren Katastrophen mit Kodimension ≤ 3 .

Prof. Sir Michael Berry, Dr. Susanne Klein, H. H. Wills Physics Laboratory, University of Bristol, Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, Großbritannien

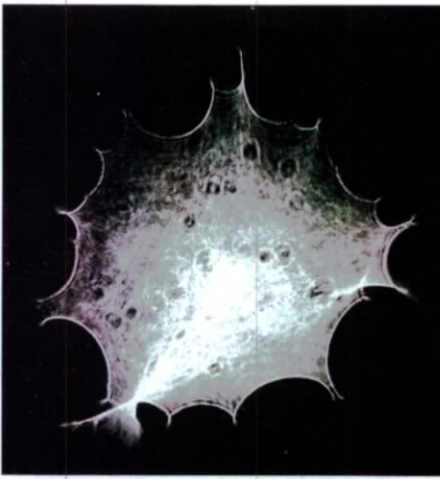


Abb. 3: Kaustiken, wie sie durch eine nasse Brille oder Windschutzscheibe mit bloßem Auge gesehen werden können.

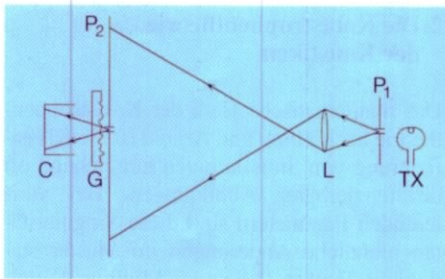


Abb. 4: Versuchsaufbau zur Beobachtung von Kaustiken: Licht von einer Weißlichtquelle TX fällt durch eine Lochblende P1, dann durch eine Linse L und schließlich durch eine zweite Lochblende P2, die das beleuchtete Gebiet der Glasscheibe G auf ungefähr 1 mm² begrenzt. Hinter G formt das durchgelassene Licht eine kaustische Oberfläche, deren Fernfeld (es beginnt ungefähr 10 mm hinter G) mit zunehmendem Abstand von G divergiert. Der typische Öffnungswinkel ist 15°. Das Licht fällt dann direkt auf die Filmebene der Kamera C. Detailvergrößerung wird durch Vergrößerung des Abstandes zwischen der Kamera C und der Glasscheibe G erreicht.

der Optik kann die Katastrophentheorie auf Grund des Fermatschen Prinzips angewandt werden: Die Ausbreitungszeit des Lichtes zwischen Quelle und Bild ist stationär.

Die Katastrophentheorie stellt einen Katalog von strukturell stabilen Kaustikformen zur Verfügung. D. h., variieren die Bedingungen, die sie erzeugt haben, so ändern sich diese Formen in sanfter Weise. Der isolierte Punktfokus einer Linse, z. B., ist in diesem Sinne nicht stabil. Der kleinste Linsenfehler zerstört den Punktfokus und ersetzt ihn durch ein kompliziertes Muster. Der Katalog besteht aus den sog. elementaren Katastrophen (Abb. 2). Sie sind nach Kodimensionen geordnet, d. h. nach Dimensionen, die durchgemustert werden müssen, um die Singularität zu finden. Der einfachste Fall ist die Falten-

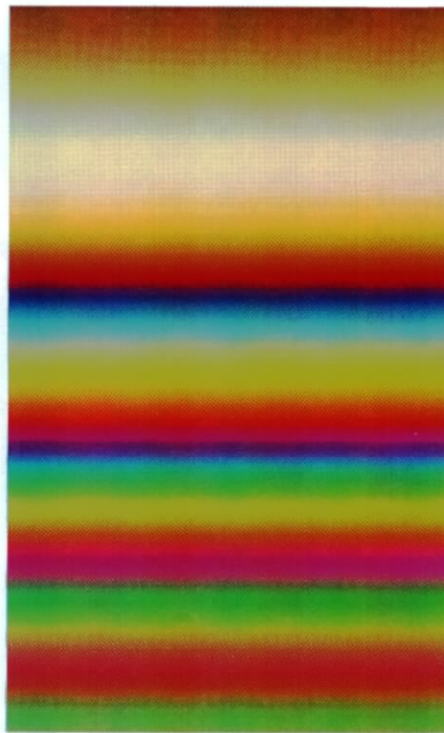


Abb. 5: Farben der Falten-Beugungskatastrophe, aufgenommen mit dem Versuchsaufbau der Abb. 4.

Katastrophe mit Kodimension 1. Sie ist entweder ein Punkt auf einer Linie, eine Linie in einer Ebene oder eine Fläche im Raum (Abb. 2). Die stabile Singularität mit Kodimension 2 heißt Spitze. Sie ist ein Punkt in der Ebene, in dem sich zwei Faltenlinien treffen, wie in Abb. 2 zu sehen ist, oder eine Linie, in der sich zwei Faltenflächen aneinanderschmiegen. Ein isolierter Punktfokus in der Ebene oder eine isolierte fokale Linie im Raum haben zwar auch Kodimension 2, sind aber nicht im Katalog der Elementarkatastrophen enthalten, da sie strukturell nicht stabil sind. Die Betonung der strukturellen Stabilität führt dazu, daß Katastrophenoptik zur Beschreibung natürlichen Fokussierens verwendet werden kann.

Einige dieser elementaren Katastrophen können in einfachen optischen Experimenten beobachtet werden. Der einfachste Versuchsaufbau ist eine nasse Brille oder Windschutzscheibe. Diejenigen unter Ihnen, die eine Brille tragen, werden bestätigen, daß es bei Regen sehr unpraktisch ist. Die ganze Welt ist verzerrt, und es kann fast unmöglich werden, Fahrrad zu fahren oder ein Straßenschild zu lesen. Gerade dann ist es aber sehr einfach, Kaustiken zu sehen. Regentropfen formen kleine Linsen. Da Brillengläser meist nicht ganz sauber sind, sind diese Tropfenlinsen irregulär. Schaut man durch sie eine punktförmige Lichtquelle an, z. B. eine entfernte Straßenlaterne bei Nacht, so kann man viele Beispiele für stabile Singularitäten in zwei Dimensionen (d. h. in der Bildebene) sehen, nämlich Falten und Spitzen (Abb. 3 und siehe [2]).



Abb. 6: Farben der Spitzen-Beugungskatastrophe, aufgenommen mit dem Versuchsaufbau der Abb. 4.

Im Labor kann der gleiche Effekt erzielt werden, wenn man ein Stück Strukturglas statt einer nassen Brille benutzt. Es sollte eine nicht-periodische Struktur haben, um eine möglichst große Auswahl von Kaustiken zu erzeugen. Wir verwenden unregelmäßig gewelltes Atlantic™, ein Produkt der britischen Glasfirma Pilkington, wobei die Unregelmäßigkeiten eine typische lineare Ausdehnung von 1 mm haben. Gute Fotos von Kaustiken erhält man mit dem Aufbau in Abb. 4. Das Licht durch die Lochblende P2 sollte wirklich parallel sein, um sich überlappende Mehrfachbilder der Kaustiken zu vermeiden. Auf diese Weise [4] wurden die Farben der Falte (Abb. 5) und der Spitze (Abb. 6) beobachtet.

3. Farben von Kaustiken

Die bekannteste Ursache von Farbe ist Brechungsdispersion; so entstehen farbige Kaustiken selbst bei fehlender Beugung. Ein schon erwähntes Beispiel dafür ist der Regenbogen der geometrischen Optik. Wir wollen hier Brechungsfarben vernachlässigen (sie sind in unseren Experimenten ohnehin unerheblich, da die Ablenkungswinkel sehr klein sind) und uns ganz auf die lebhaften Farben der Beugungsmuster konzentrieren, die bei Weißlicht durch Interferenz nahe der Kaustik entstehen. Diese Interferenzfarben sind im Regentropfenexperiment mit unbewaffnetem Auge kaum zu sehen. Die Kaustiken erscheinen schwarz/weiß, was dem gesunden physikalischen Menschenverstand widerspricht. Es handelt sich dabei um eine

Illusion. Sie wird durch die Unfähigkeit des Auges verursacht, Farbenunterschiede sehr kleiner Strukturen wahrzunehmen. Es ist aber dann immer noch möglich, Intensitätsunterschiede aufzulösen (mehr darüber in [3]).

Für eine Weißlichtquelle ist das Intensitätsspektrum $I(R, \lambda)$ des gebeugten Lichtes der Wellenlänge λ im Feldpunkt $R = \{x_i\} = \{x_1, x_2, \dots\}$ gleich dem Betragsquadrat der Wellenfunktion $\psi(R, \lambda)$ für eine Quelle der Stärke 1, multipliziert mit der spektralen Verteilung $S(\lambda)$ der Weißlichtquelle:

$$I(R, \lambda) = S(\lambda) |\psi(R, \lambda)|^2. \quad (1)$$

Mathematisch hat jeder Typ der monochromatischen Kaustiken sein charakteristisches „Beugungskatastrophenmuster“. Die Beugungskatastrophenfunktion der Falte ist eine Airy-Funktion, die der Spitze eine Pearcey-Funktion [2]. Abb. 7 zeigt die entsprechenden Intensitätsverteilungen. Diese Muster sind bei Verwendung von Weißlicht farbig, da die Interferenzmaxima verschiedener Wellenlängen an verschiedenen Stellen auftreten. Abgesehen von der Abhängigkeit vom Spektrum des Weißlichtes, sind die Farben universal, d. h. sie sind typisch für die geometrische Singularität. Universalität ist die Konsequenz einer wunderbaren Eigenschaft der optischen Wellenfunktion $\psi(R, \lambda)$, die die Interferenzmuster am Orte einer gegebenen geometrischen Singularität beschreibt. Die Wellenfunktion folgt nämlich einem einfachen Skalierungsverhalten,

$$\psi(R, \lambda) = \frac{C}{\lambda^\beta} \Psi \left(\left\{ \frac{x_i}{\lambda^{\sigma_i}} \right\} \right), \quad (2)$$

wobei Ψ die entsprechende Beugungskatastrophenfunktion ist. Der „kritische Exponent“ β beschreibt, wie die Lichtintensität im geometrischen Limes $\lambda \rightarrow 0$ divergiert, und die Exponenten σ_i bestimmen, wie die Streifen für $\lambda \rightarrow 0$ verschwinden.

Die theoretische Vorhersage der Farbe in jedem Feldpunkt [3, 4] erfordert die Berechnung der Tristimuluswerte. Diese definieren die Mengen von drei Grundfarben, die, additiv gemischt, der in Frage stehenden Farbe in den Augen des Standardbeobachters entsprechen. Im System der Commission International d’Eclairage (CIE) sind die Tristimuluswerte $U_i(R)$ gegeben durch

$$U_i(R) = \int_0^\infty d\lambda I(R, \lambda) u_i(\lambda), \quad (3)$$

wobei die drei Funktionen $u_i(\lambda)$ mit den drei Typen farbempfindlicher Zapfen der menschlichen Netzhaut in Zusammenhang stehen. Die Berechnung der Beugungskatastrophen der farbigen Falte und Spitze wurde unter Verwendung von (1–3) mit Hilfe des Programms Mathematica™ durchgeführt. Die Farben wurden auf einem Bildschirm

oder Drucker wiedergegeben, indem die CIE-Tristimuluswerte in die entsprechenden RGB (rot-grün-blau) Koordinaten umgewandelt und dann für die entsprechenden Nichtlinearitäten korrigiert wurden.

Abb. 8 zeigt die auf diese Weise berechneten Farben der Falte, Abb. 9 die der Spitze. Die

Übereinstimmung mit der experimentellen Beobachtung (Abb. 5 und 6) ist nicht perfekt, da erstens das Spektrum der Quelle nicht exakt simuliert wurde, und zweitens das menschliche Auge ein empfindlicher Detektor für Farbunterschiede ist. Die Haupteigenschaften der beobachteten Farben sind jedoch durch die Theorie eingefangen.

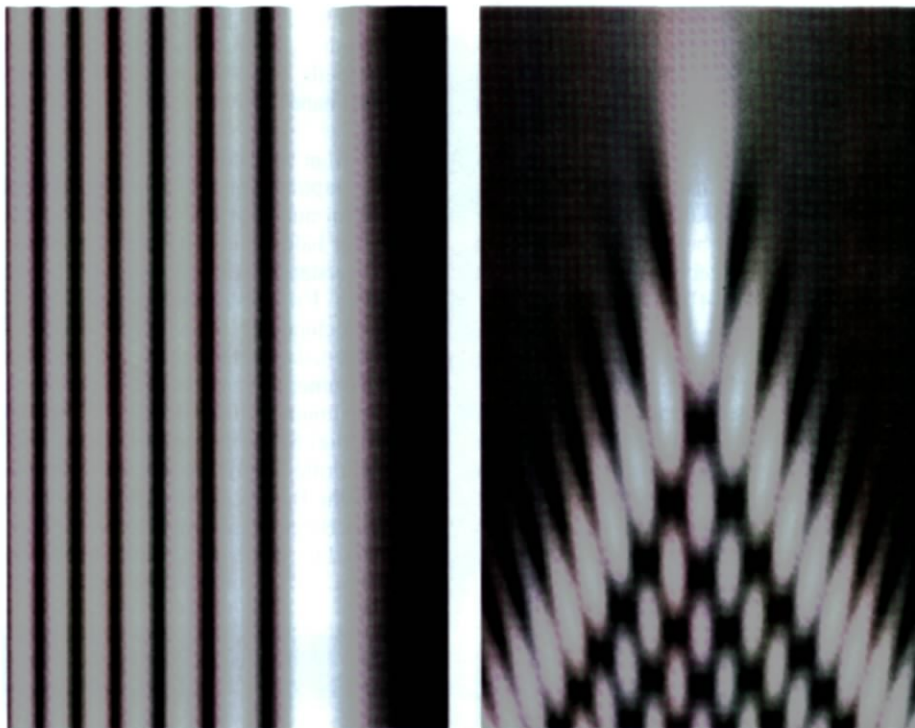


Abb. 7: Theoretische Intensitätsverteilung der Falten- bzw. Spitzen-Beugungskatastrophe für monochromatisches Licht (links bzw. rechts).

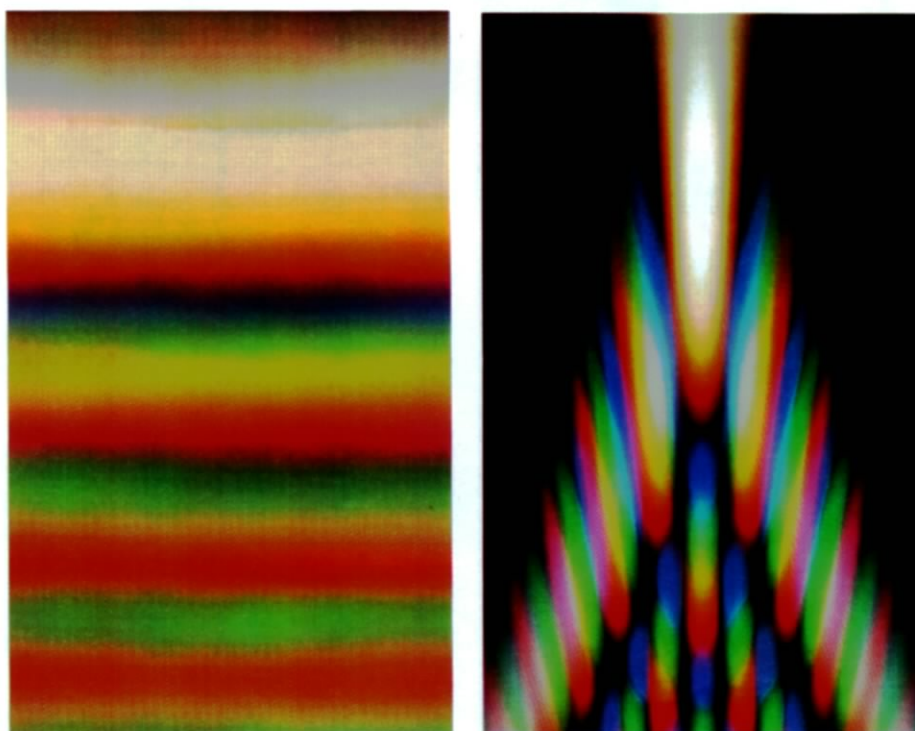


Abb. 8: Theoretische Interferenzfarben der Falte.

Abb. 9: Theoretische Interferenzfarben der Spitze.

Unsere Untersuchung der farbigen Kaustiken, insbesondere der ständige Vergleich von Theorie und Experiment, hat zu drei interessanten Ergebnissen geführt.

Erstens: Zur theoretischen Erklärung, warum so unerwartet viele Beugungsstreifen gesehen werden können. Eine naive Abschätzung legt ungefähr zwei sichtbare Streifen für Weißlicht nahe. Sie beruht darauf, daß der Streifenkontrast durch Überlappen verschiedener Farben zerstört wird und daß das sichtbare Spektrum Wellenlängen enthält, die sich durch einen Faktor zwei ($\Delta\lambda/\lambda \approx 1/2$) unterscheiden. Die drei getrennten Zapfenfunktionen $u_i(\lambda)$ sind aber viel enger als das sichtbare Spektrum, und wie Abb. 10 zeigt, nimmt der Intensitätskontrast schneller ab als der Farbkontrast. Farben können also bis tief in das Interferenzgebiet hinein aufgelöst werden (siehe auch [4]).

Zweitens: Zur experimentellen Beobachtung und theoretischen Erklärung der feinen Linien parallel zu den Symmetrieachsen von farbigen Spitzen-Kaustiken (Abb. 11). Man findet diese Linien seltsamerweise nicht in Spitzen, die durch monochromatisches Licht entstehen. Sie müssen daher Artefakte der Überlagerung verschiedener Farben sein.

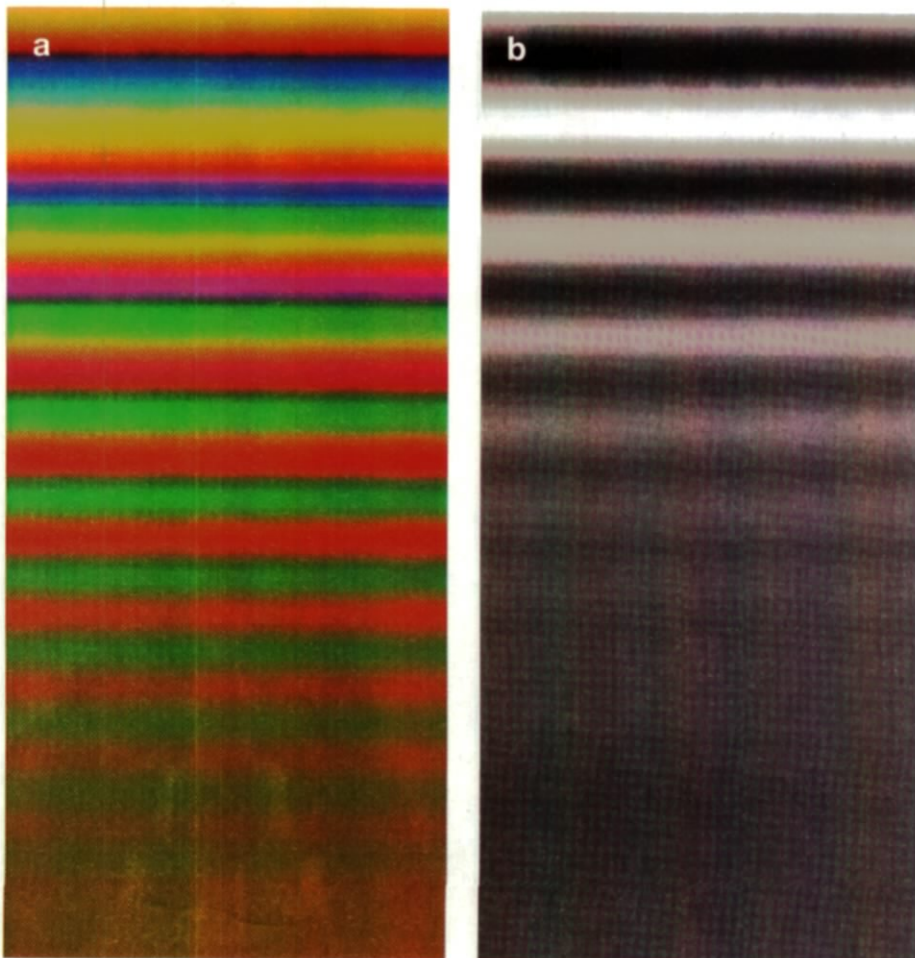


Abb. 10: (a) Farben senkrecht zu einer Falte; (b) Intensität der Farben. Man beachte, daß der Intensitätskontrast schneller als der Farbkontrast verschwindet.

Partielle Dekohärenz erklärt sie: Jeder Punkt in einer Spitze wird von drei Strahlen erreicht. Ihre monochromatische Interferenz ergibt das Muster aus Maxima und Minima in Abb. 7. Wenn nun zwei der Weißlichtstrahlen r_1 und r_2 eine sehr kleine Phasendifferenz haben, aber jeweils stark von der Phase des dritten Strahls r_3 differieren, dann werden die Beugungsstreifen, die von der Interferenz zwischen r_1 und r_2 herrühren, erhalten bleiben, die jeweiligen Interferenzstreifen mit r_3 aber verschwinden. Genau diese partielle Dekohärenz tritt in Spitzen-Kaustiken nahe der Achse auf.

Drittens: Man beachte, daß in Abb. 11 nicht nur das Hauptmaximum in jeder Spitze weiß ist, sondern auch die Maxima weiter unten entlang der Falten, die von der Spitze ausgehen. Die ersten Maxima entlang der Falten sind farbig. Um diese Erscheinungen zu erklären, möchten wir zuerst darauf aufmerksam machen, daß in der Spitze selbst alle drei Strahlen immer in Phase sind, und daher das Hauptmaximum weiß ist. In den Falten sind zwei der drei Strahlen immer in Phase. Solange der dritte Strahl vernachlässigt werden kann, ist ihr Beitrag farblos (Man erinnere sich, daß Brechungsdispersion vernachlässigt wird). Das ist der Fall weit entfernt von

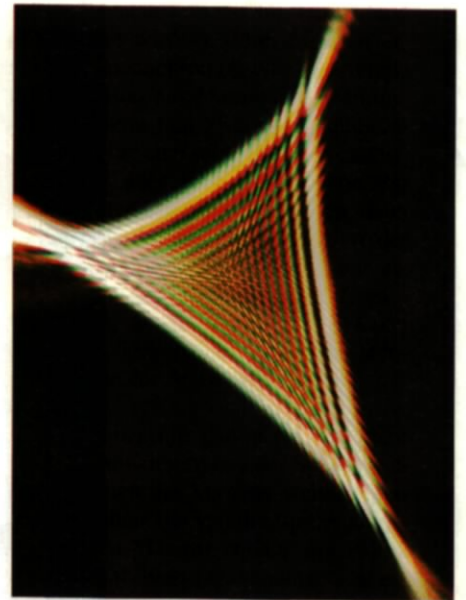


Abb. 11: Drei Spitzen, die mit Strukturglas erzeugt wurden. Die feinen Linien, die von den Spitzen ausgehen und sich in der Mitte des Bildes kreuzen, sind Artefakte der partiellen Dekohärenz.

der Spitze. Nur für die ersten Maxima entlang der Falte, nahe der Spitze, ist der dritte Strahl hell genug, um durch seine Phasendifferenz mit den beiden anderen Strahlen Interferenzfarben zu erzeugen.

Wir hoffen, daß wir zeigen konnten, daß wissenschaftliches Verstehen von Naturphänomenen Schönheit nicht zerstört, sondern erst schafft, daß altbekannte Phänomene ihre Geheimnisse bergen, und daß die Zusammenarbeit von Theorie und Experiment zu unerwarteten Ergebnissen führt.

Danksagung

Wir möchten Herrn Dr. Gregor Tanner und Herrn Dr. Jens Marklof für viele nützliche Hinweise danken.

Literatur

- [1] R. Thom: Structural stability and morphogenesis, W. A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1975
- [2] M. V. Berry, C. Upstill: Catastrophe Optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns, Progress in Optics **18** (1980) 257
- [3] M. V. Berry, A. N. Wilson: Black and White fringes and the Colors of Caustics, Applied Optics **33** (1994) 4714
- [4] M. V. Berry, S. Klein: Colored diffraction catastrophes, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **93** (1996) 2614
- [5] E. C. Zeeman: Catastrophe Theory, Addison-Wesley, London, 1977